



Università della Terza Età "Cardinale
Giovanni Colombo" - Milano

A. A. 2022 - 2023

Corso di Archeoastronomia

Docente:

Adriano Gaspani

I metodi e le tecniche
dell'Archeoastronomia

Allineamento Archeoastronomico

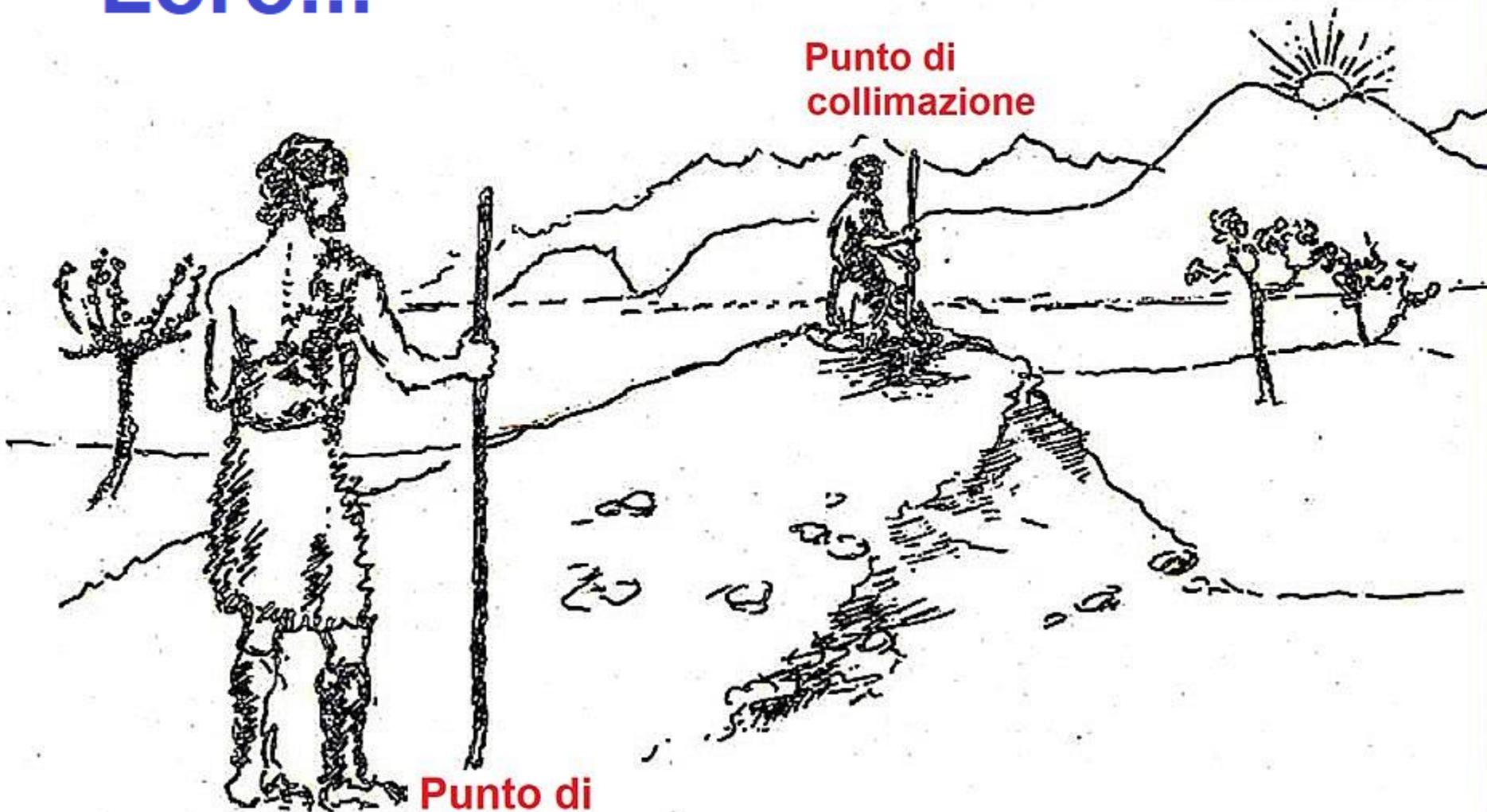
Loro...

Target
Astronomico

Punto di
collimazione

Punto di
stazione

Codifica dell'Informazione



Noi...



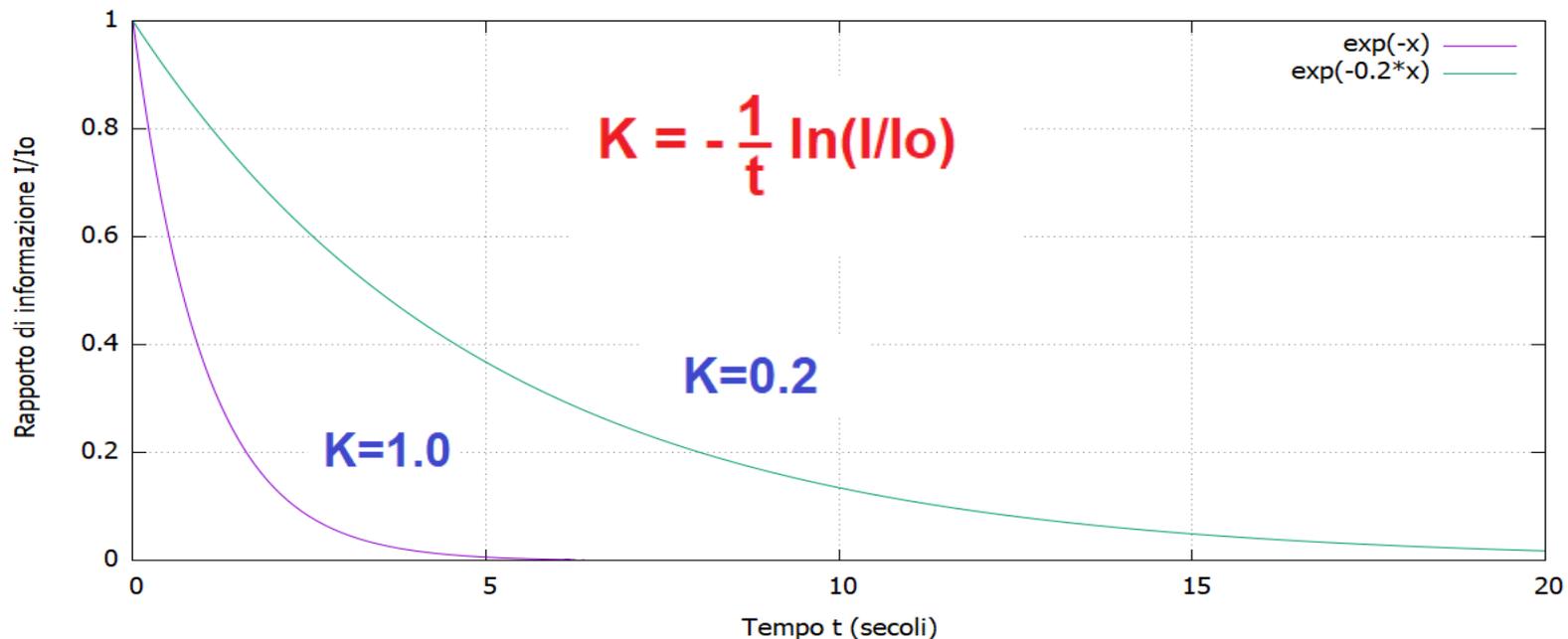
Recupero dell'Informazione

$$\frac{I}{I_0} = \frac{\text{Informazione recuperata}}{\text{informazione originale}} < 1$$

$$\frac{I}{I_0} = \frac{\text{Informazione recuperata}}{\text{informazione originale}} = e^{-K \cdot t}$$

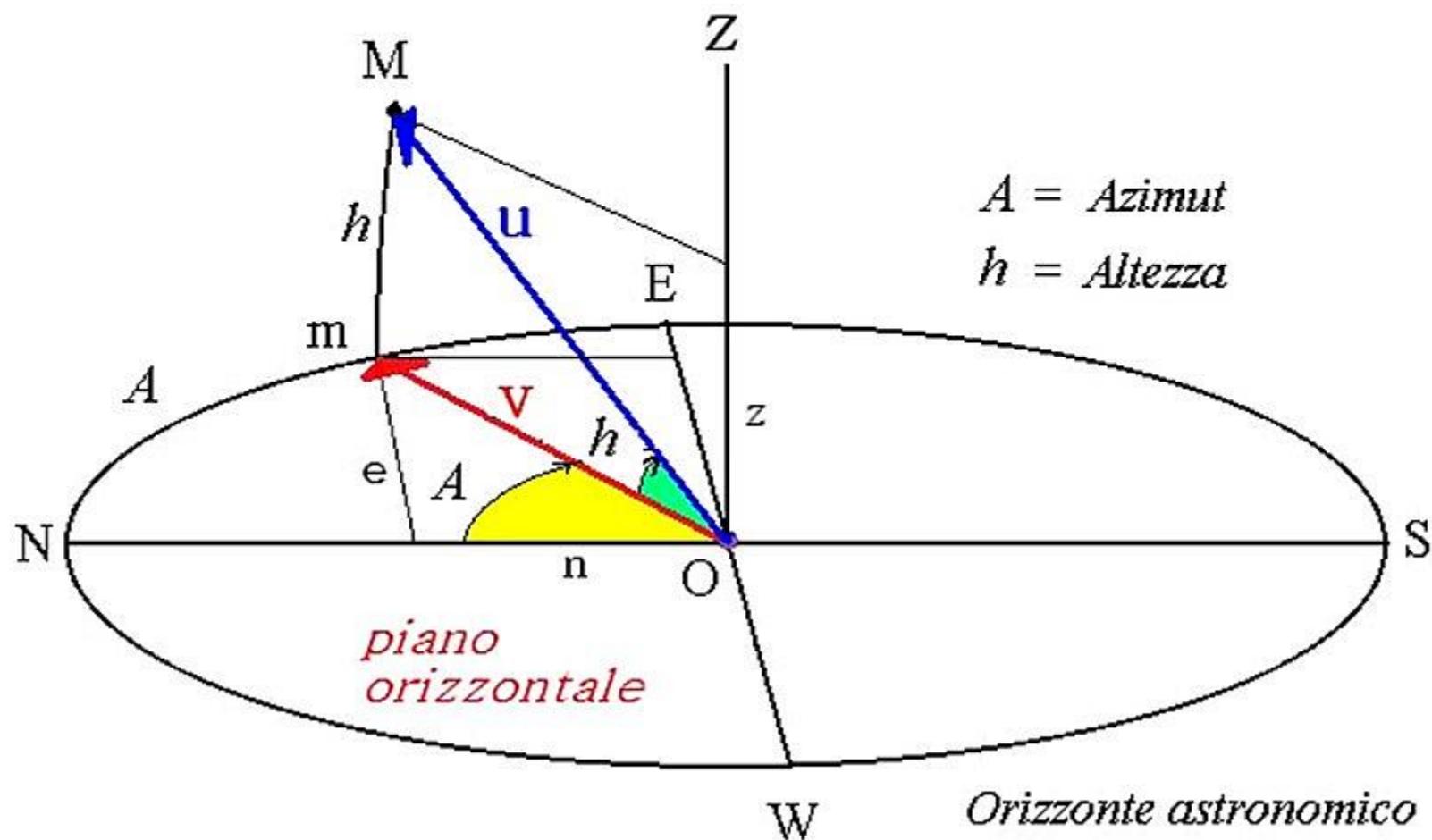
t = tempo trascorso

K = coeff. di perdita dell'informazione



Definizione di Allineamento

Un allineamento \vec{u} (OM) è un vettore definito da tre coordinate ortogonali n, e, z : ($n = \text{northing}$; $e = \text{easting}$; $z = \text{elevation}$) oppure da una coppia di coordinate angolari Az, h ($Az = \text{Azimut astronomico}$; $h = \text{altezza angolare}$), poichè $\|\vec{u}\| := 1$.



\vec{u} = allineamento OM

\vec{v} = proiezione dell'allineamento OM sul piano orizzontale

Az = Azimut astronomico

h = altezza angolare dell'orizzonte naturale locale

e = easting

n = northing

z = elevation

Siccome $\|u\| = \|v\| := 1$ per definizione si ha:

$$n = \cos(h) \cdot \cos(Az)$$

$$e = \cos(h) \cdot \sin(Az)$$

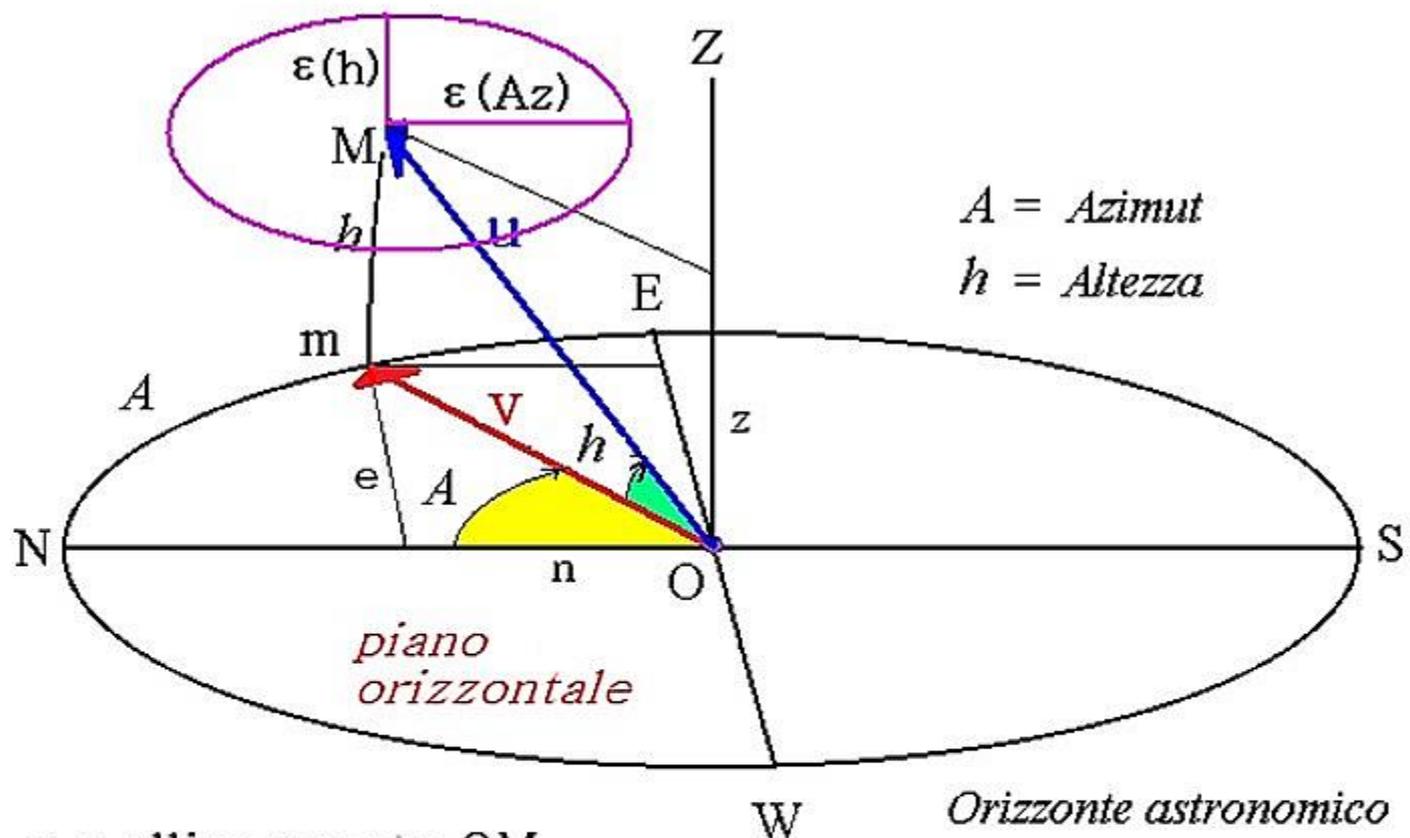
$$z = \sin(h)$$

Ellisse d'errore di un allineamento misurato

Il rilievo di un allineamento produce una coppia di coordinate altazimutali Az (Azimut) e h (Altezza angolare) riferite alla direzione nord del meridiano astronomico locale (Az) e alla linea dell'orizzonte astronomico (h). Ciascuna delle due coordinate è misurata con una barra d'errore $\pm \varepsilon(Az)$ e $\pm \varepsilon(h)$ rispettivamente.

Queste due quantità rappresentano i semiassi di un'ellisse d'errore centrata nel punto M le cui coordinate sono Az e h lka quale definisce sulla Sfera Celeste uno spot di incertezza relativo al quel particolare allineamento misurato.

Da notare che $\pm \varepsilon(Az)$ e $\pm \varepsilon(h)$ dipendono anche dalla strumentazione con cui i rilievi sono stati eseguiti.

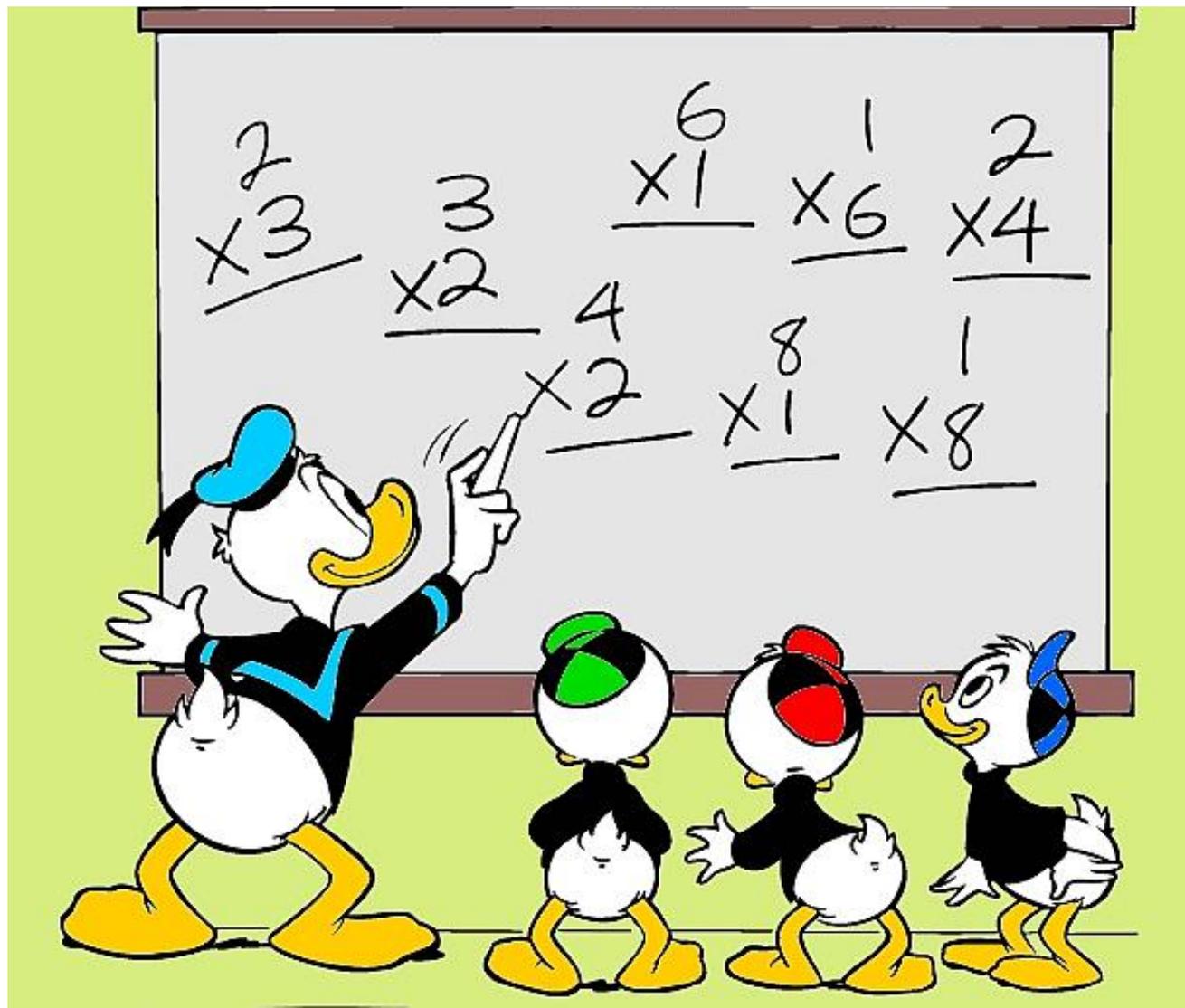


- u = allineamento OM
- v = proiezione dell'allineamento OM sul piano orizzontale
- Az = Azimut astronomico
- h = altezza angolare dell'orizzonte naturale locale

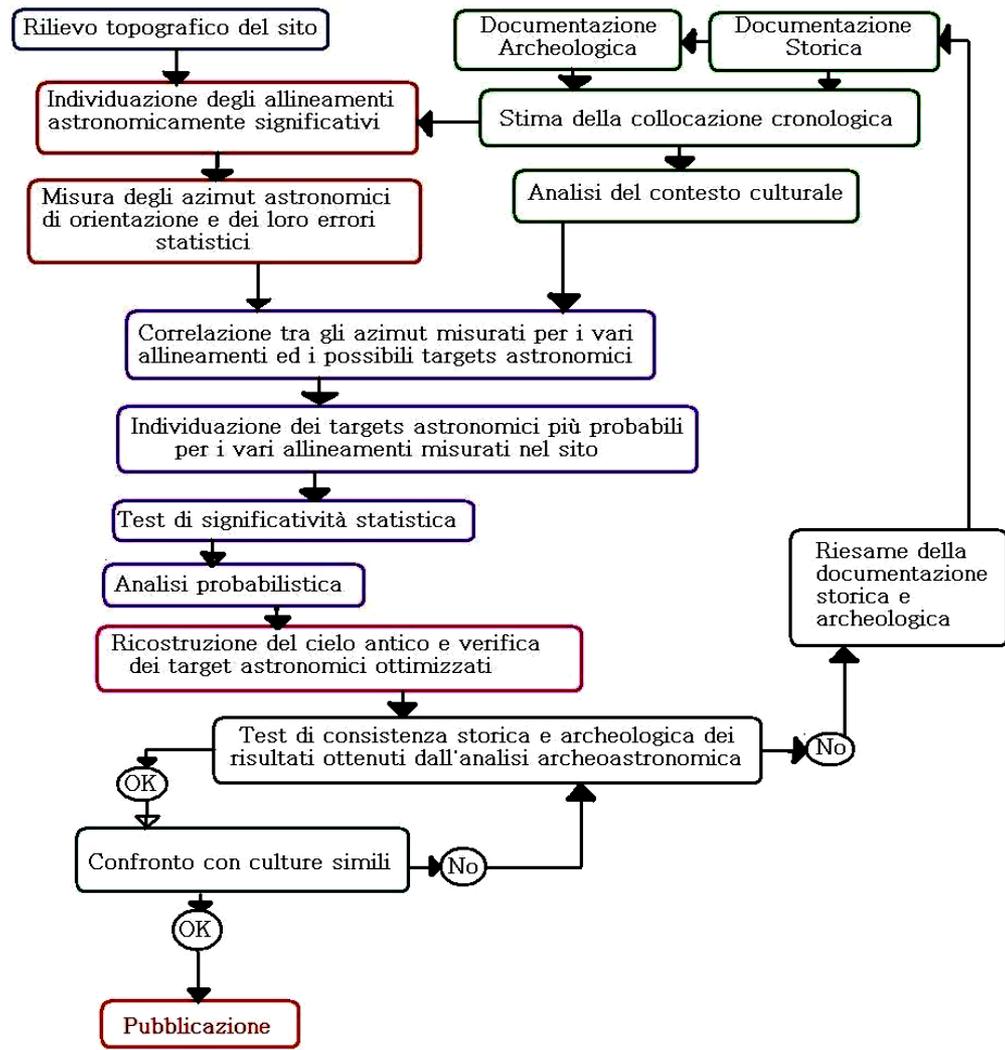
L'equazione dell'ellisse d'errore è:

$$\left[\frac{(Az - A_M)}{\varepsilon(Az)} \right]^2 + \left[\frac{(h - h_M)}{\varepsilon(h)} \right]^2 = 1$$

Metodologia operativa

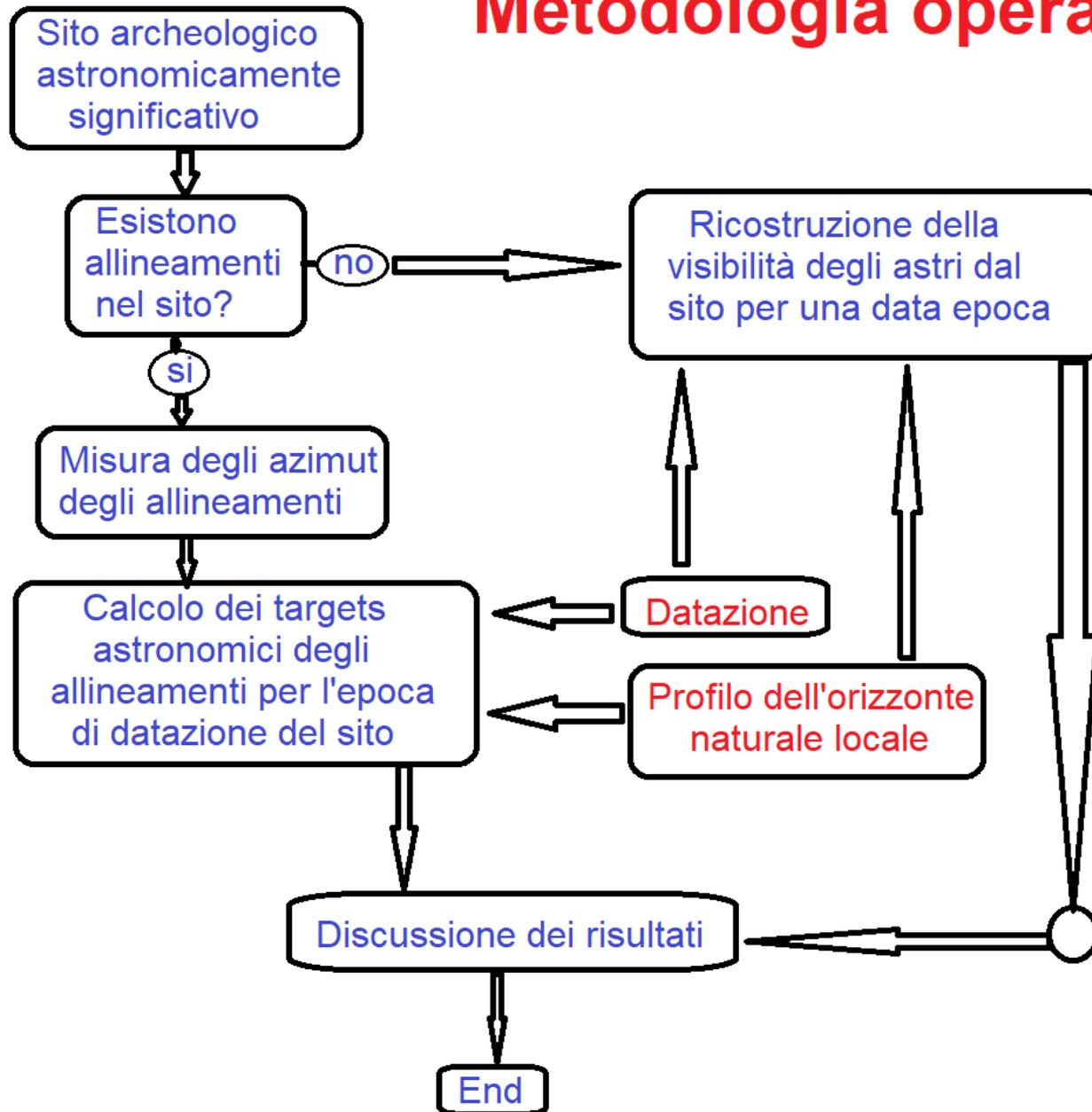


Metodologia operativa



Linee guida per l'analisi archeoastronomica di un sito archeologico potenzialmente astronomicamente significativo

Metodologia operativa



Metodologia operativa

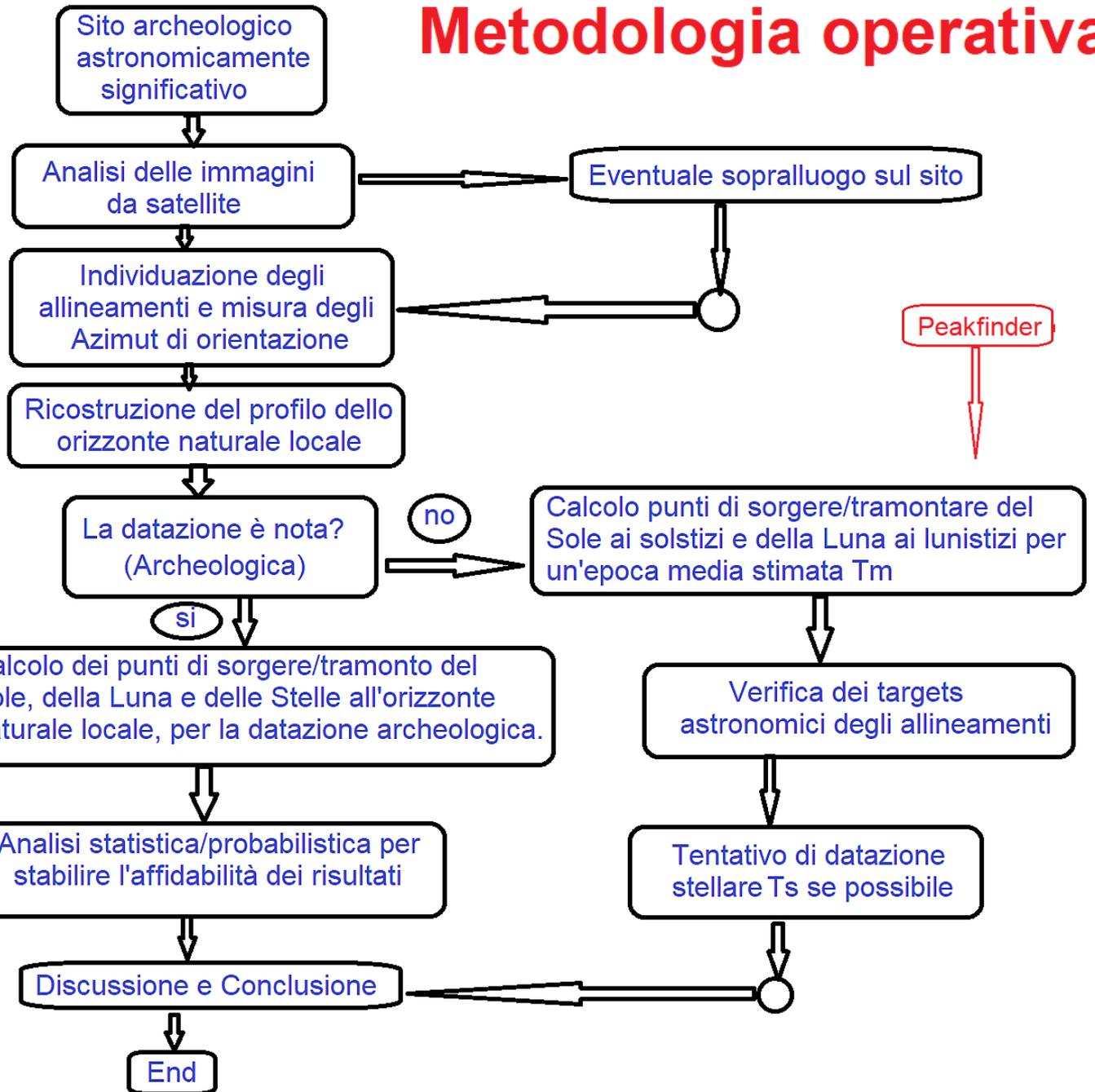
Google Earth
Zoom Earth
Earth Explorer
P.C.N.
Yandex
NASA Satellite Pro

Peakfinder

Peakfinder

Skymap

Netsun
Netmoon
Rigel



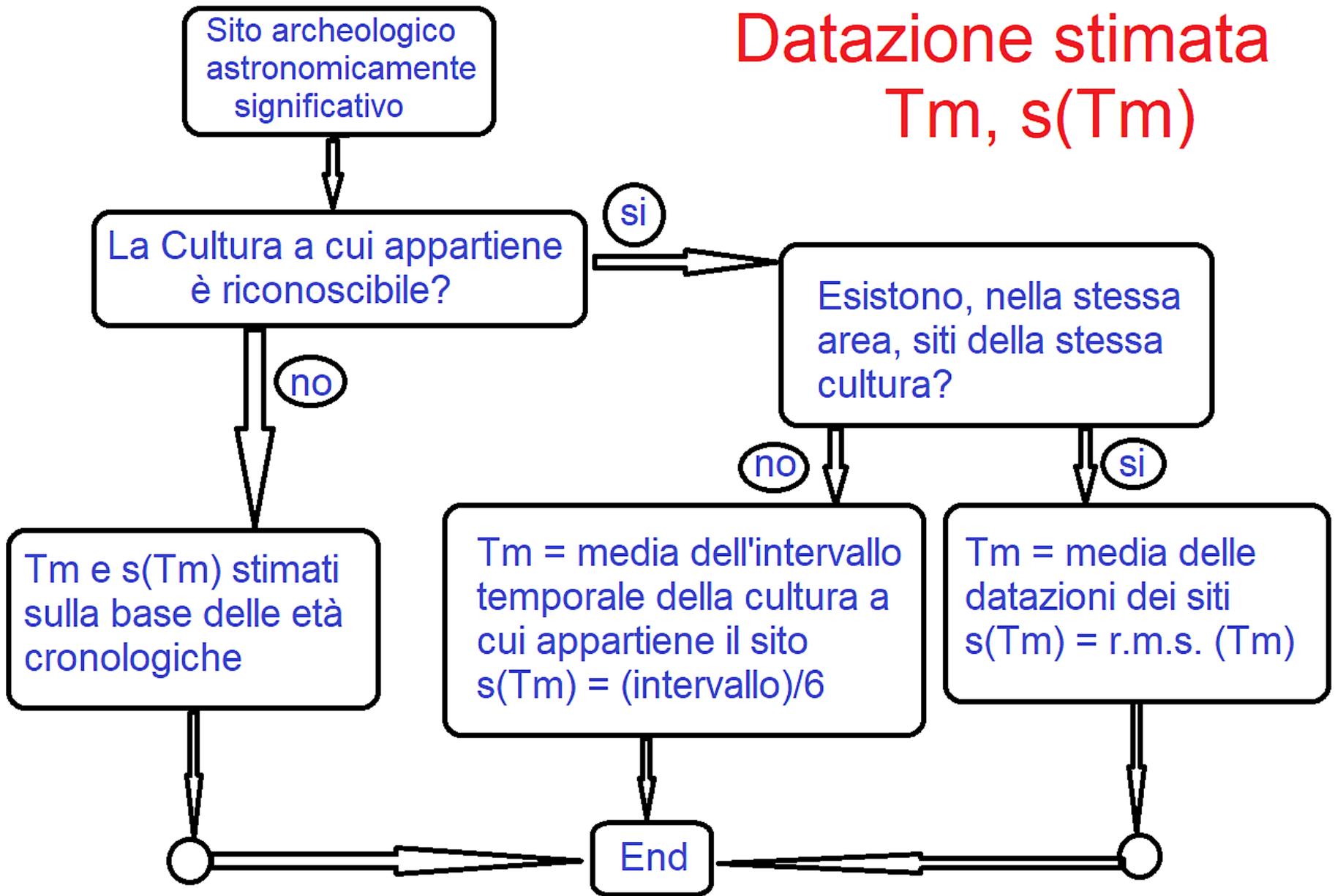
Peakfinder

**l'Analisi Archeoastronomica
deve essere consistente
rispettando tre criteri:**

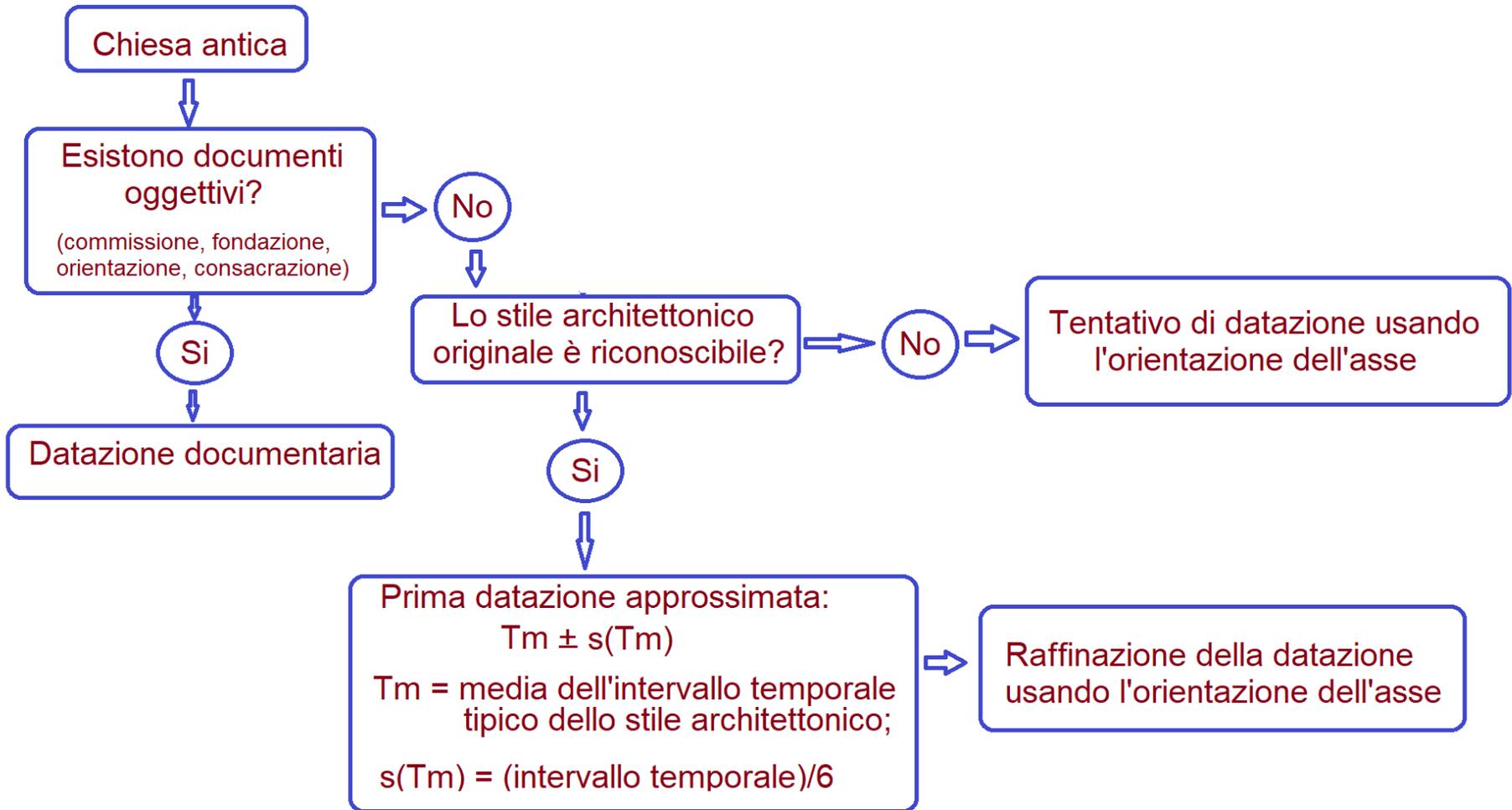
- o) Consistenza Astronomica**
- o) Consistenza Archeologica**
- o) Consistenza Etnografica**

...criterio di Schaefer

Datazione stimata $T_m, s(T_m)$



Datazione di una chiesa antica



Datazione di una chiesa antica

Raffinazione della datazione
usando l'orientazione dell'asse

Studio dell'orientazione astronomica
(sorgere del Sole a Pasqua,
errore del calendario giuliano ripetuto al
computo solare vero, orientazione
lunistiziale lunare)

Stima della datazione T_m e della sua incertezza $s(T_m)$ sulla base delle età cronologiche locali

Data una età cronologica (Età del Ferro, Età del Bronzo, Neolitico etc...), localmente è noto dall'archeologia l'epoca di inizio t_{inizio} e quella di fine t_{fine} . Allora l'età stimata del sito sarà:

$$T_m = \frac{1}{2} (t_{\text{inizio}} + t_{\text{fine}})$$

$$s(T_m) = \pm \frac{1}{6} |t_{\text{fine}} - t_{\text{inizio}}|$$

Esempio: Età del Ferro: inizio = -1000 , fine = 0 ; allora:

$$T_m = (-1000+0)/2 = -500 \text{ (501 a.C.)}$$

$$s(T_m) = |0 - 1000|/6 = 167 \text{ anni}$$

quindi

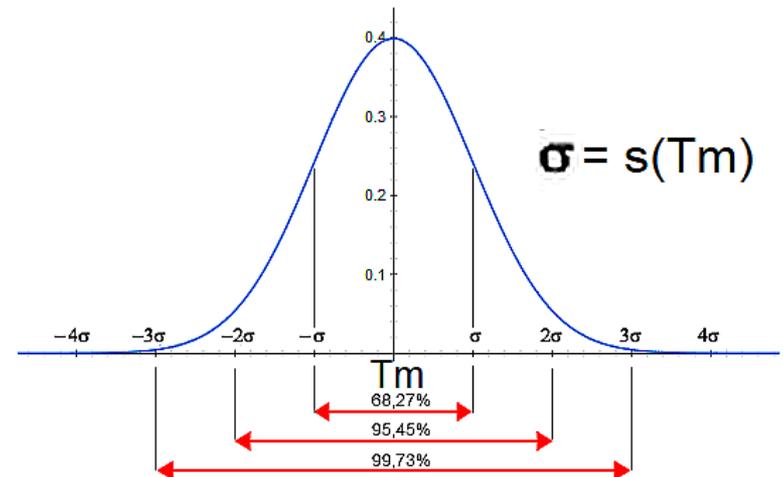
$$T_m = -500 \pm 167 \text{ anni}$$

67% probabilità

Funzione densità di probabilità per la datazione stimata

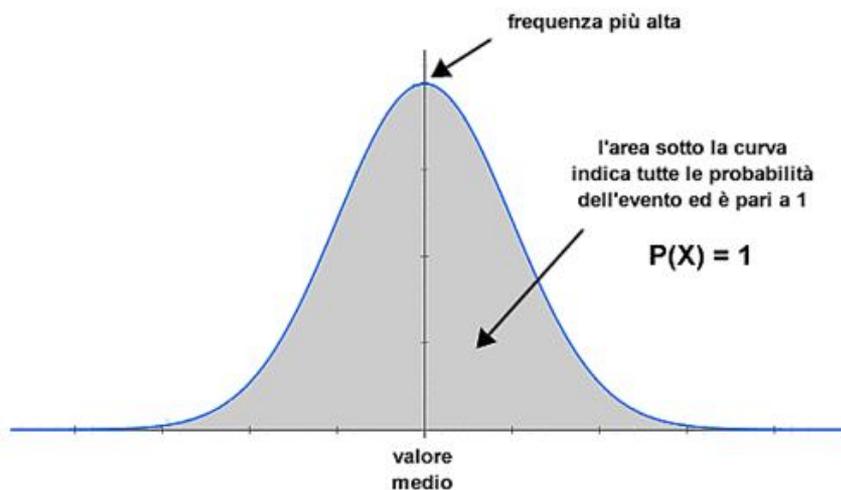
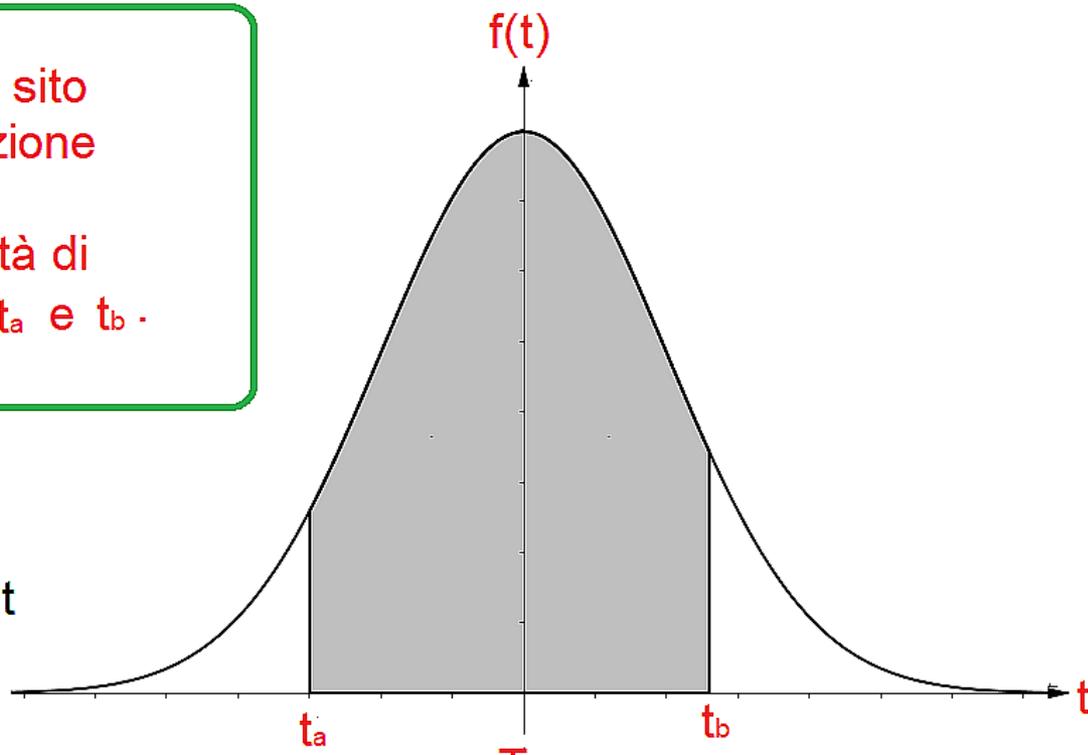
Sia dato T_m e $s(T_m)$, la funzione densità di probabilità (p.d.f.) $f(t)$ è data da:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot s(T_m)} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{t - T_m}{s(T_m)} \right)^2}$$



La probabilità $P(t_a, t_b)$ che un sito archeologico abbia una datazione compresa tra t_a e t_b è data dall'area della funzione densità di probabilità $f(t)$ calcolata tra t_a e t_b .

$$P(t_a, t_b) = \int_{t_a}^{t_b} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot s(T_m)} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{t - T_m}{s(T_m)} \right)^2} dt$$



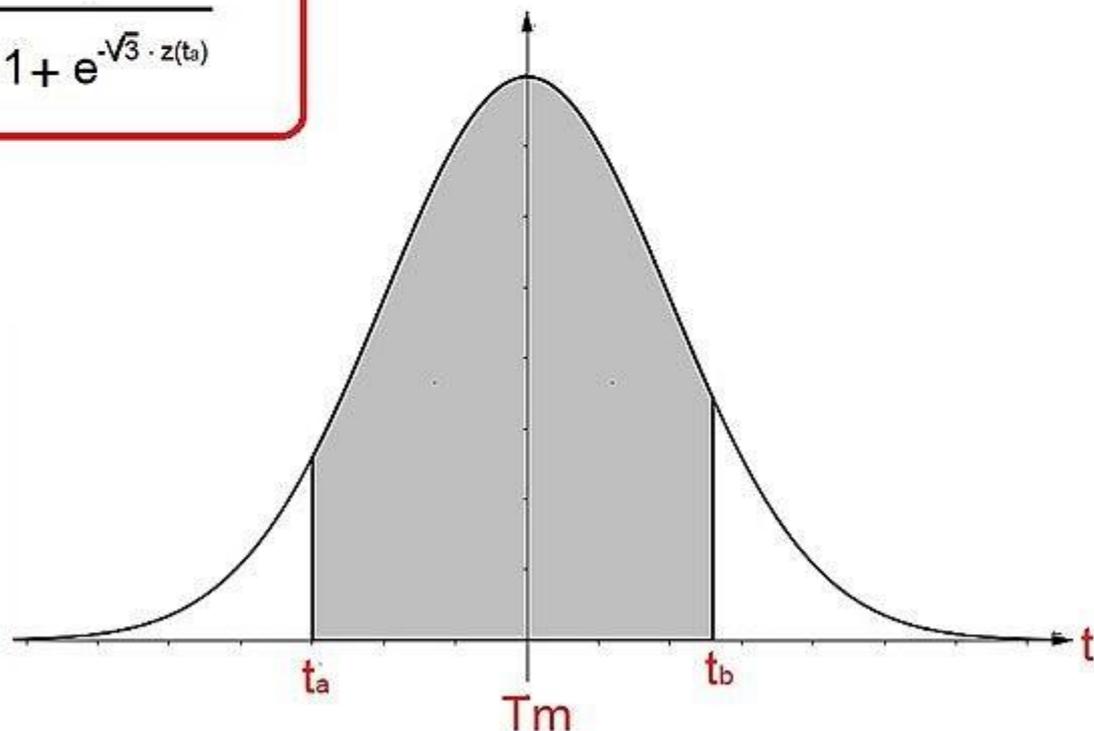
La probabilità $P(t_a, t_b)$ che un sito archeologico abbia una datazione compresa tra t_a e t_b è approssimabile con:

$$P(t_a, t_b) = \frac{1}{1 + e^{-\sqrt{3} \cdot z(t_b)}} - \frac{1}{1 + e^{-\sqrt{3} \cdot z(t_a)}}$$

con:

$$z(t_a) = \frac{(t_a - T_m)}{s(T_m)}$$

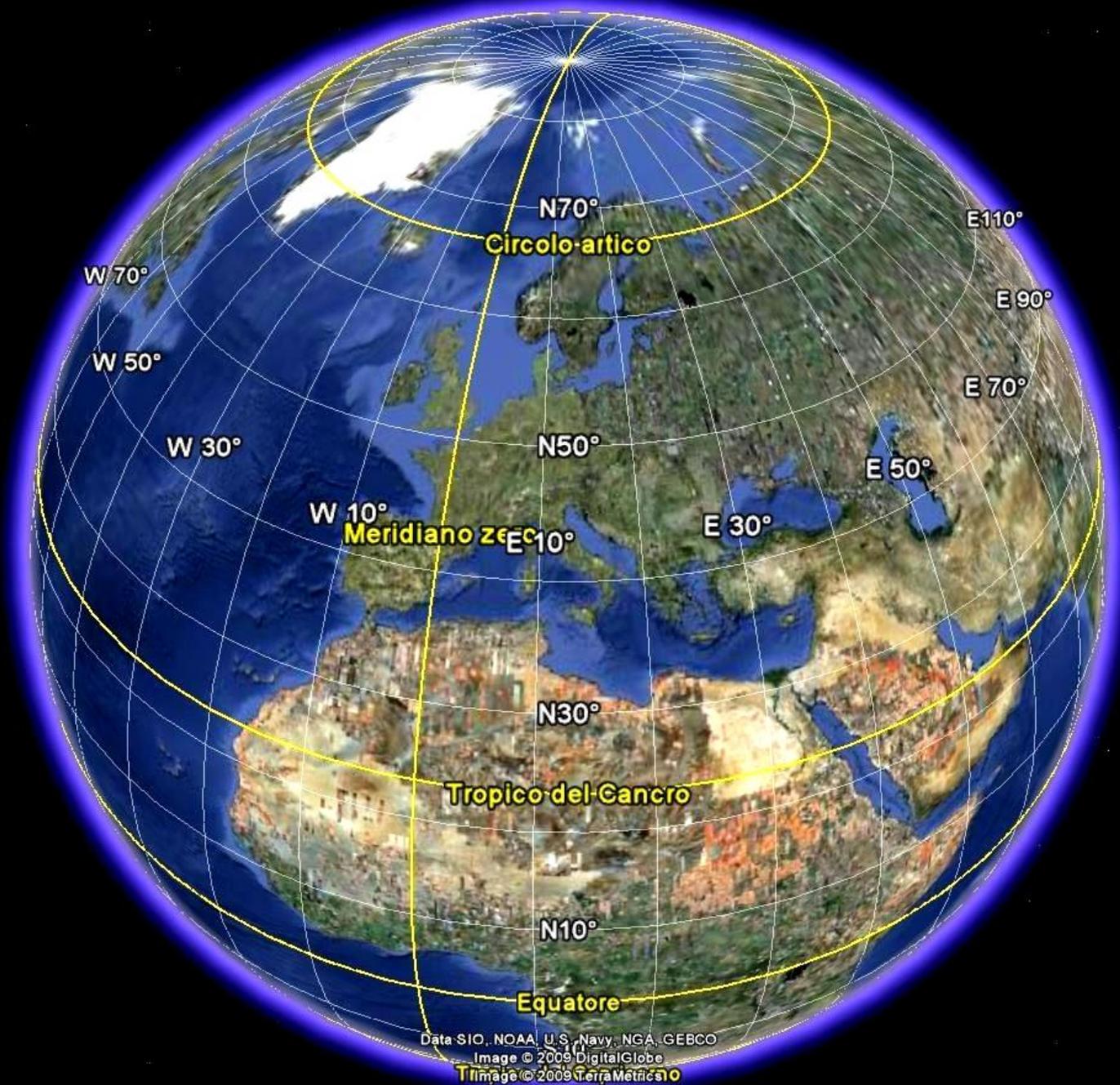
$$z(t_b) = \frac{(t_b - T_m)}{s(T_m)}$$



Elementi di Astronomia

Sistemi di Coordinate





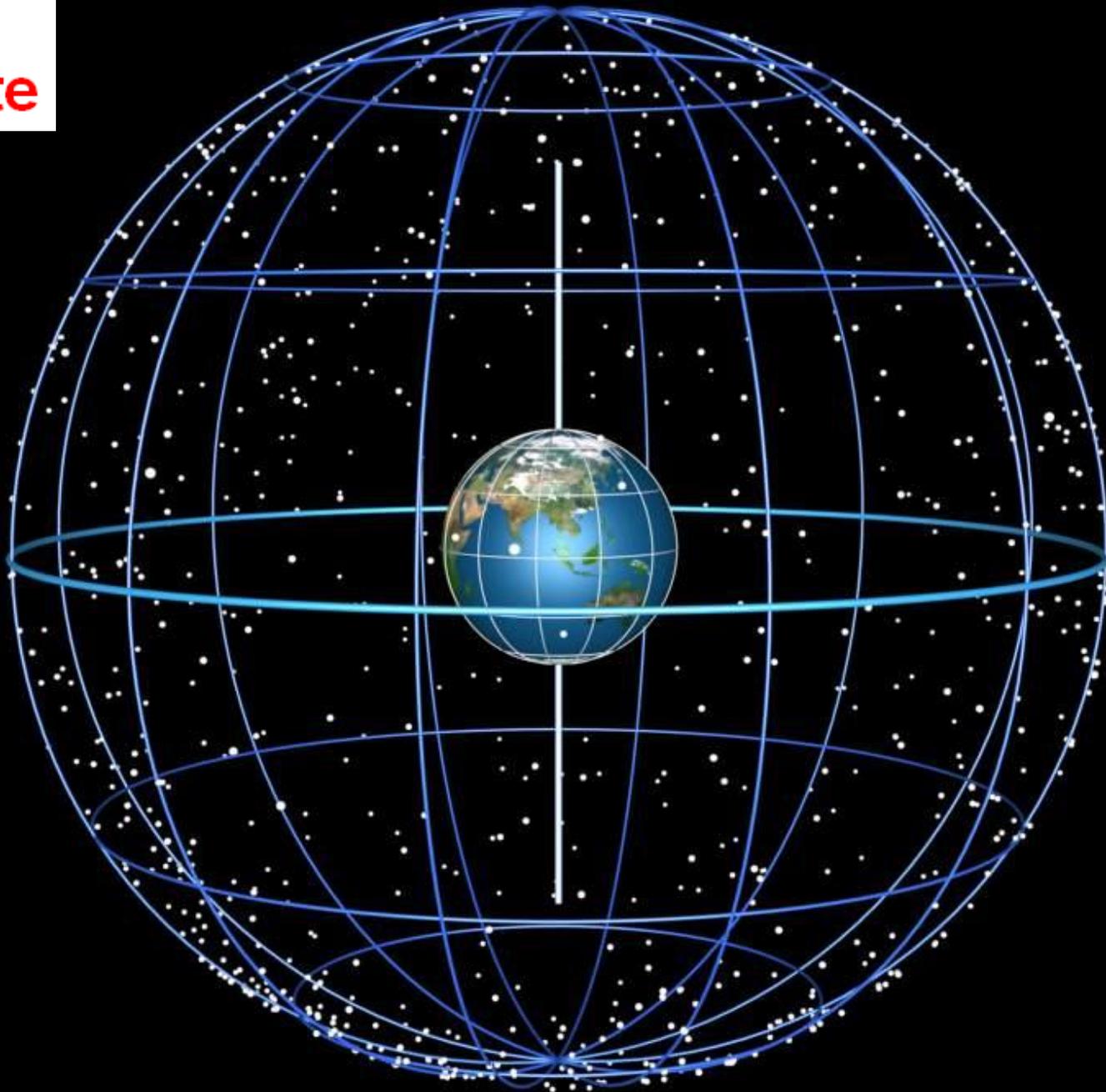
Data SIO, NOAA, U.S. Navy, NGA, GEBCO
Image © 2009 DigitalGlobe
Image © 2009 TerraMetrics
Image IBCAO
107 m elev

©2008 Google™

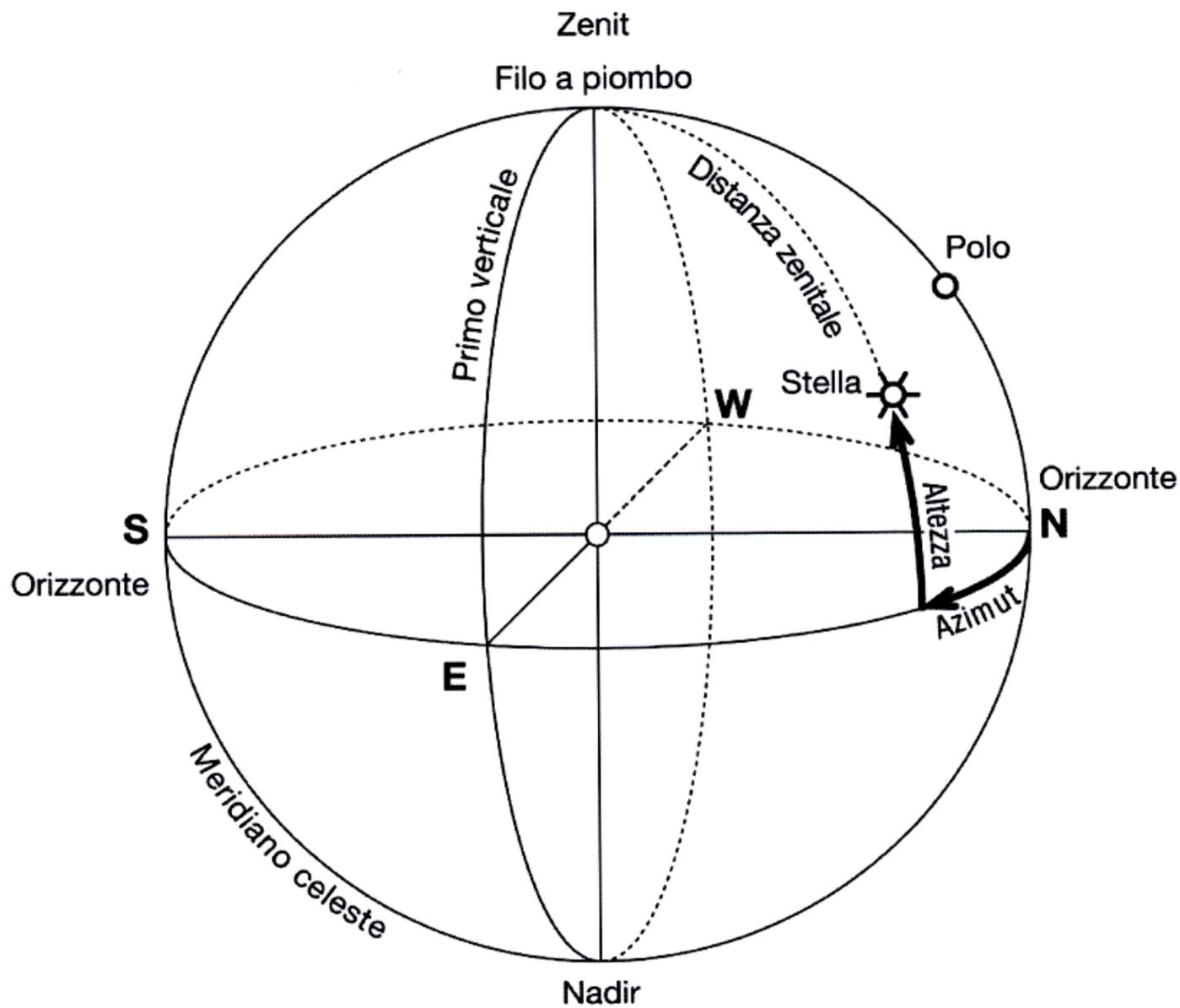
42°49'59.99" N 12°50'00.01" E

11001.10 km Alt

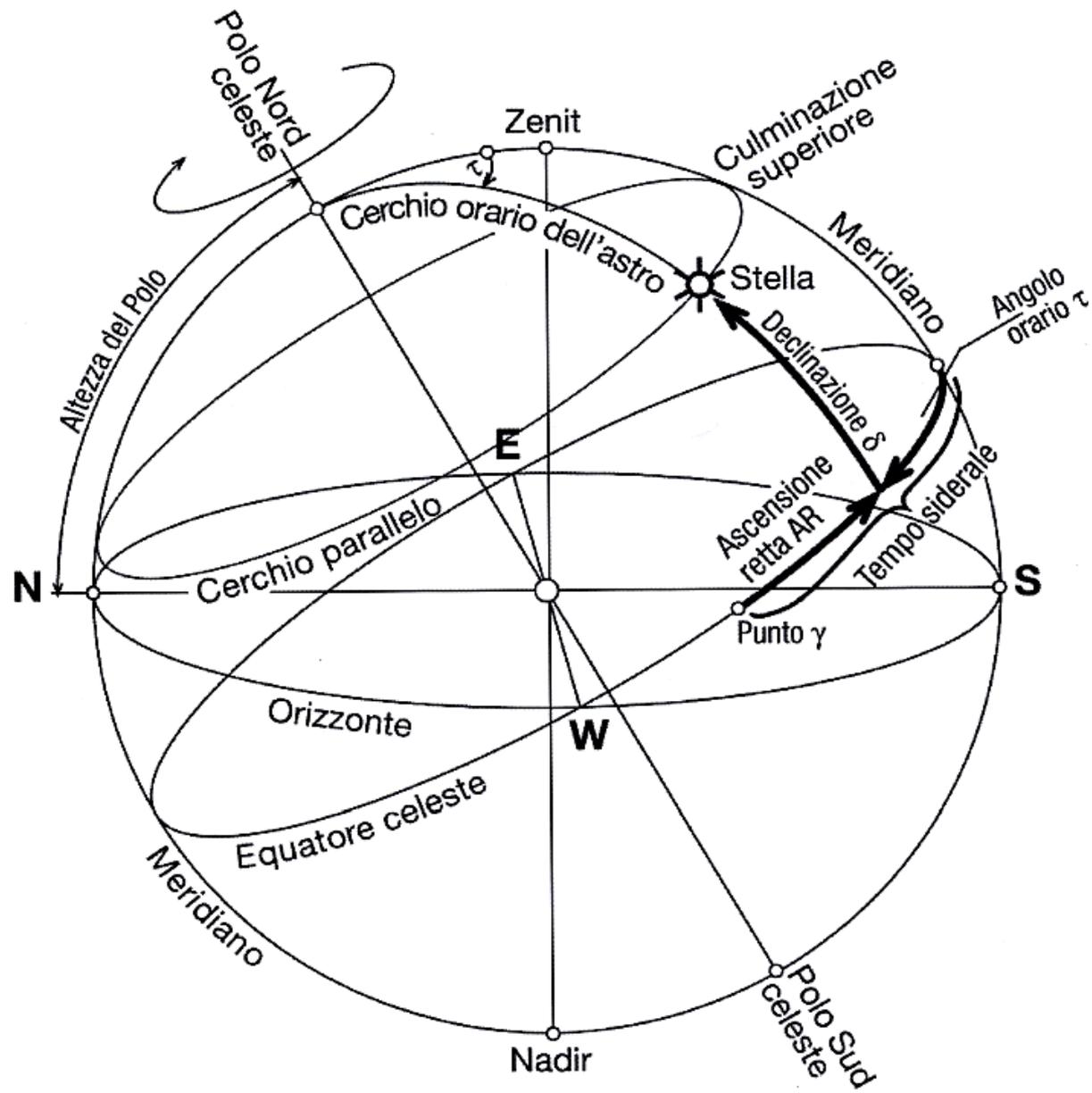
Sfera Celeste

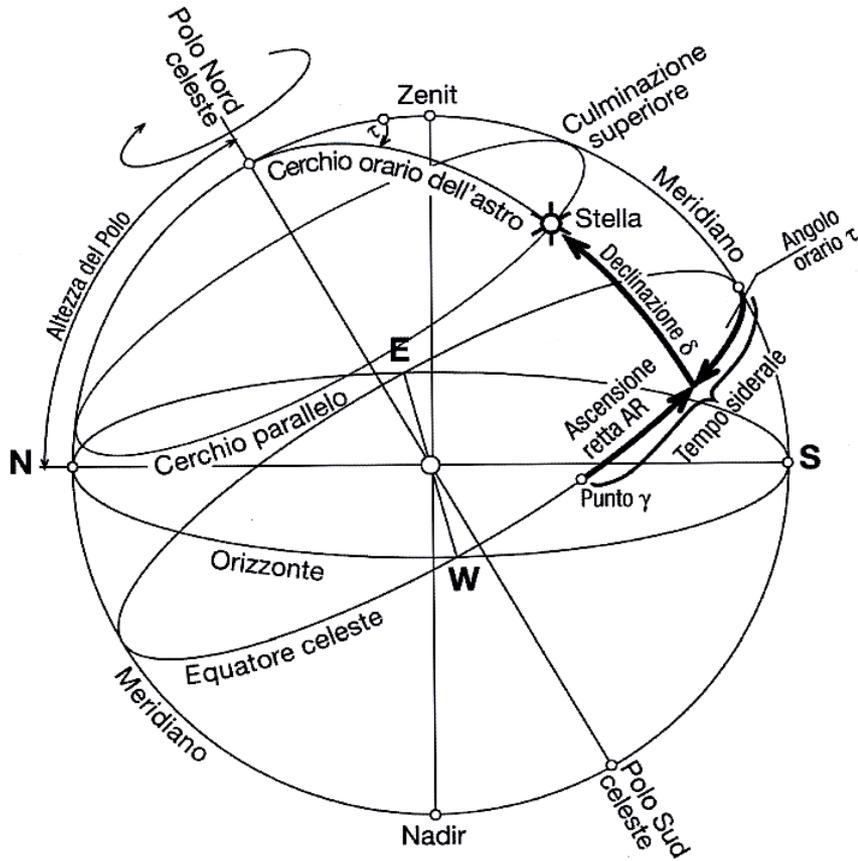


Coordinate Altazimutali



Coordinate Equatoriali





Coordinate Equatoriali celesti



Coordinate Geografiche terrestri

Inclinazione dell'asse della
Terra: $\varepsilon = 23^\circ,5$

SISTEMI DI COORDINATE

Possiamo ora definire i vari sistemi di coordinate:

Coordinate Altazimutali

h = *Altezza*: altezza dell'astro (in gradi) sull'orizzonte dell'osservatore.

A = *Azimut*: distanza angolare, misurata sull'orizzonte in senso orario (verso est), tra il punto cardinale nord e l'intersezione sull'orizzonte del circolo massimo passante per lo zenit e l'astro.

Coordinate equatoriali celesti

δ = *Declinazione*: distanza angolare dell'astro dall'equatore celeste misurata positivamente se si va verso il polo nord celeste.

α , AR = *Ascensione Retta*: distanza angolare misurata sull'equatore celeste in senso antiorario a partire dal punto γ fino all'intersezione sull'equatore celeste del circolo massimo passante per il polo celeste e l'astro (circolo orario).

Le coordinate equatoriali celesti di un astro non variano nel tempo (se si prescinde dagli effetti di precessione, e nutazione, e pertanto si prestano per la costruzione di atlanti celesti).

Coordinate Orarie

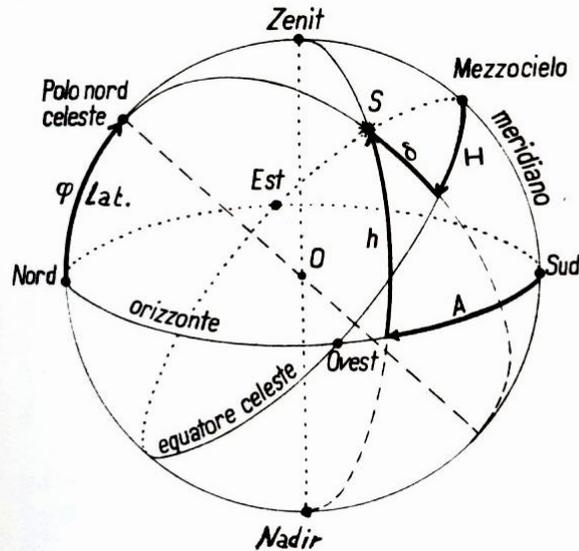
δ = *Declinazione*: definita come sopra.

H = *Angolo Orario*: distanza angolare, misurata sull'equatore celeste in senso orario, dal mezzogiorno M (punto di intersezione tra il meridiano del luogo e l'equatore celeste) all'intersezione tra equatore celeste e circolo massimo passante per il polo celeste e l'astro.

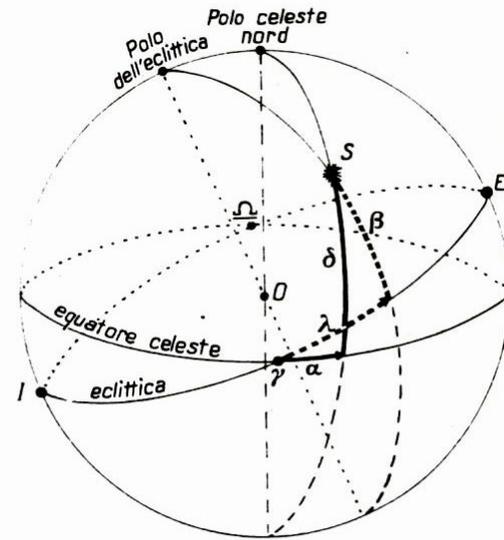
L'angolo orario di un astro varia nel tempo a causa del moto di rotazione della Terra. Esso è legato all'ascensione retta della formula:

$$H = TS - \alpha$$

dove TS è il tempo siderale locale per l'istante considerato



Rappresentazione sulla sfera celeste delle coordinate altazimutali (h , A) ed orarie (δ , H).



Rappresentazione sulla sfera celeste delle coordinate equatoriali celesti (δ , AR) ed eclittiche (β , λ).

TRASFORMAZIONI DI COORDINATE

Il sistema di coordinate orarie e quello altazimutale sono legati dalle seguenti relazioni:

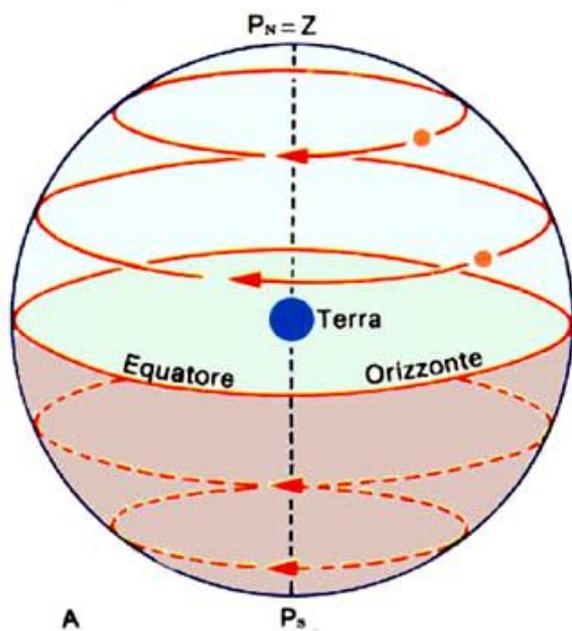
$$\begin{aligned} \cos h \cos A &= \cos \delta \cos H \sin \varphi - \sin \delta \cos \varphi \\ \cos h \sin A &= \cos \delta \sin H \\ \sin h &= \cos \delta \cos H \cos \varphi + \sin \delta \sin \varphi \end{aligned}$$

e inversamente:

$$\begin{aligned} \cos \delta \cos H &= \cos h \cos A \sin \varphi + \sin h \cos \varphi \\ \cos \delta \sin H &= \cos h \sin A \\ \sin \delta &= \sin h \sin \varphi - \cos h \cos A \cos \varphi \end{aligned}$$

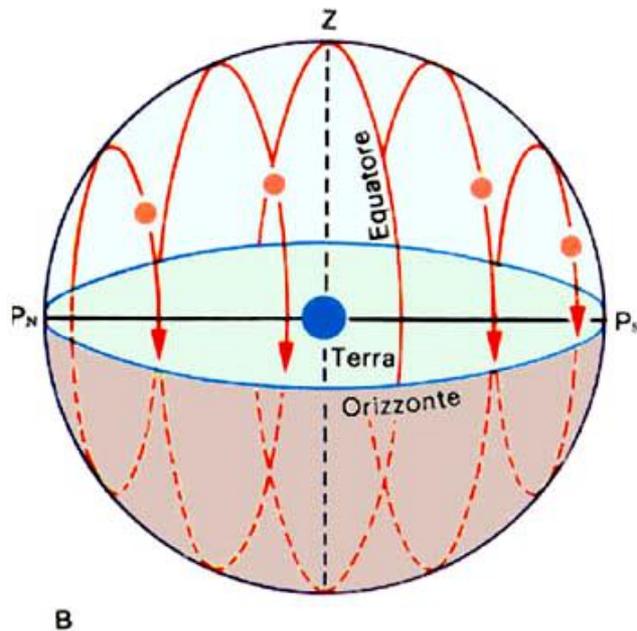
indicando con φ la latitudine geografica dell'osservatore.

La sfera celeste da varie latitudini



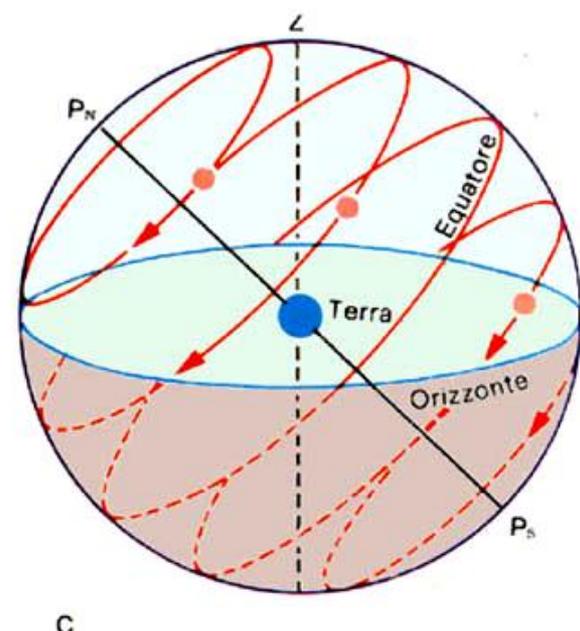
A

Polo Nord



B

Equatore



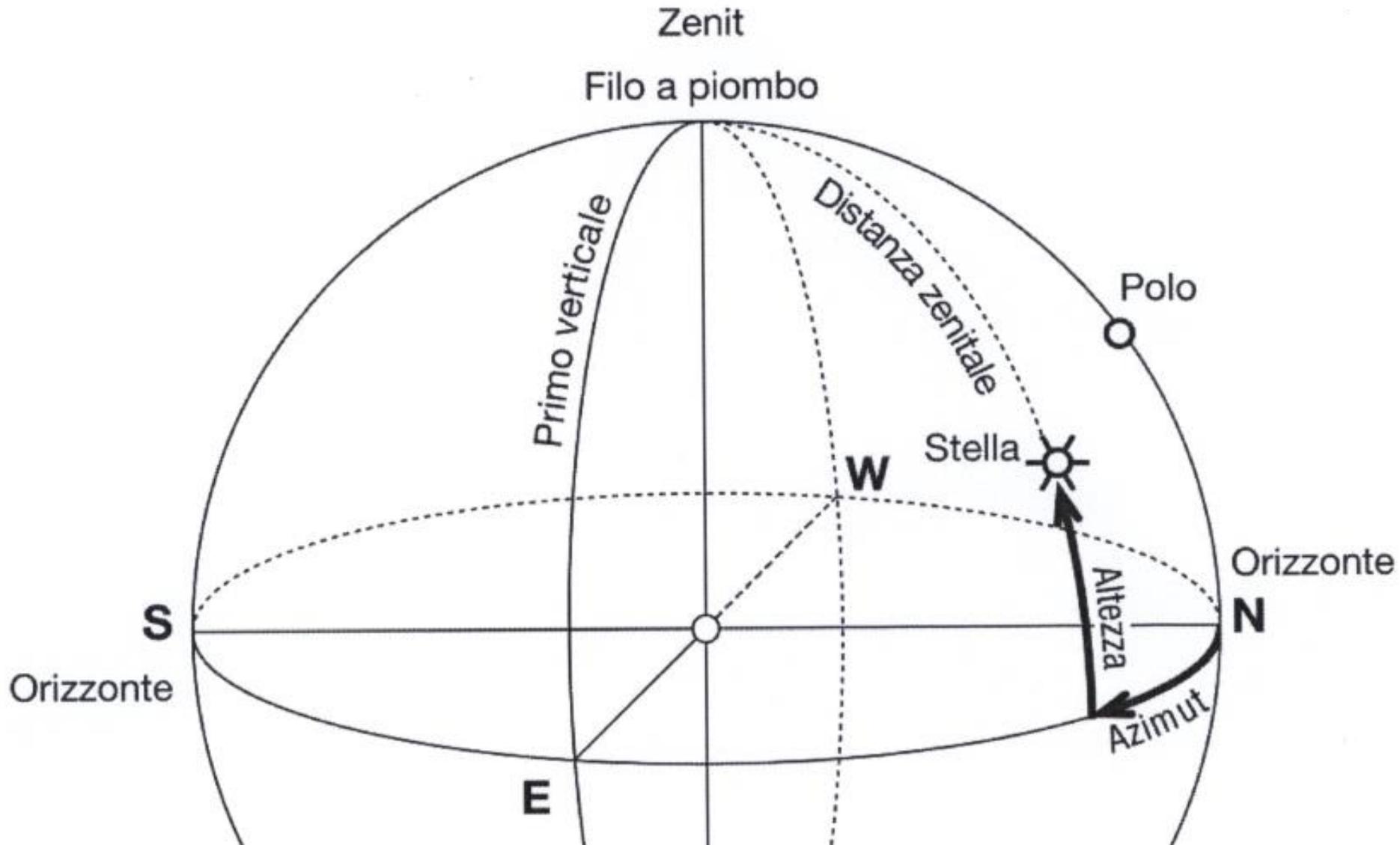
C

Latitudine 45°

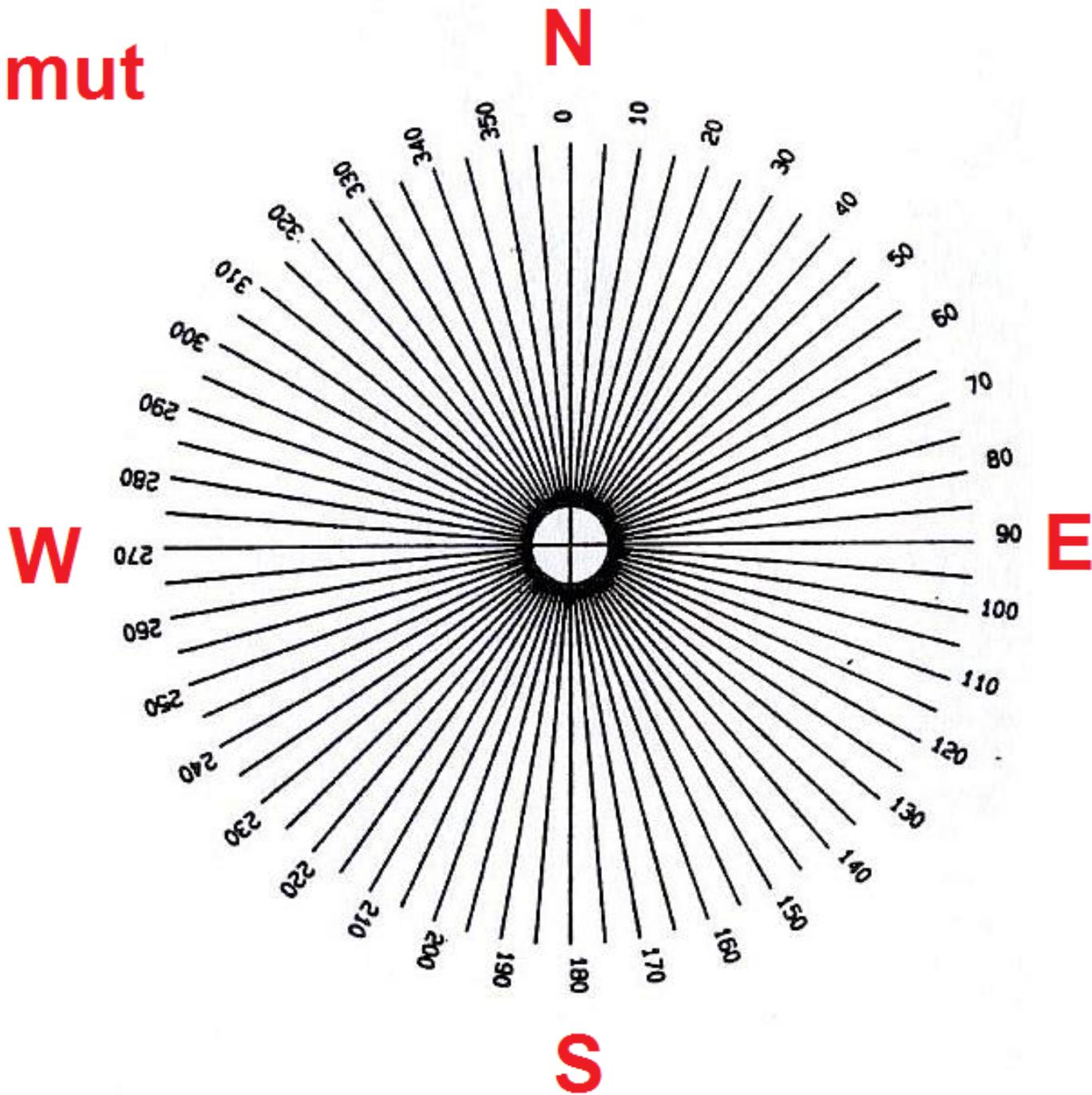
Frazione di Sfera Celeste visibile

Latitudini (gradi)	Frazione di cielo visibile tutto l'anno %	Frazione di cielo visibile nel corso del- l'anno %	Frazione di cielo invisibile tutto l'anno %
0 (equatore)	0	100	0
10	1	99	1
20	3	97	3
30	7	93	7
40	12	88	12
50	18	82	18
60	25	75	25
70	33	67	33
80	41	59	41
90	50	50	50

Altezza e Azimut



Azimut



Azimut Geodetico e Azimut Astronomico

L'Azimut geometrico si misura su una proiezione stabilita da un certo Datum.

Se il Datum è il WGS84 allora l'Azimut geodetico corrisponde all'Azimut astronomico

Ellissoide WGS84



Semiassse maggiore

$$a = 6378137 \text{ m}$$

Semiassse minore

$$b = 6356752,314 \text{ m}$$

Raggio di curvatura polare $c = \frac{a^2}{b} = 6399593,626 \text{ m}$

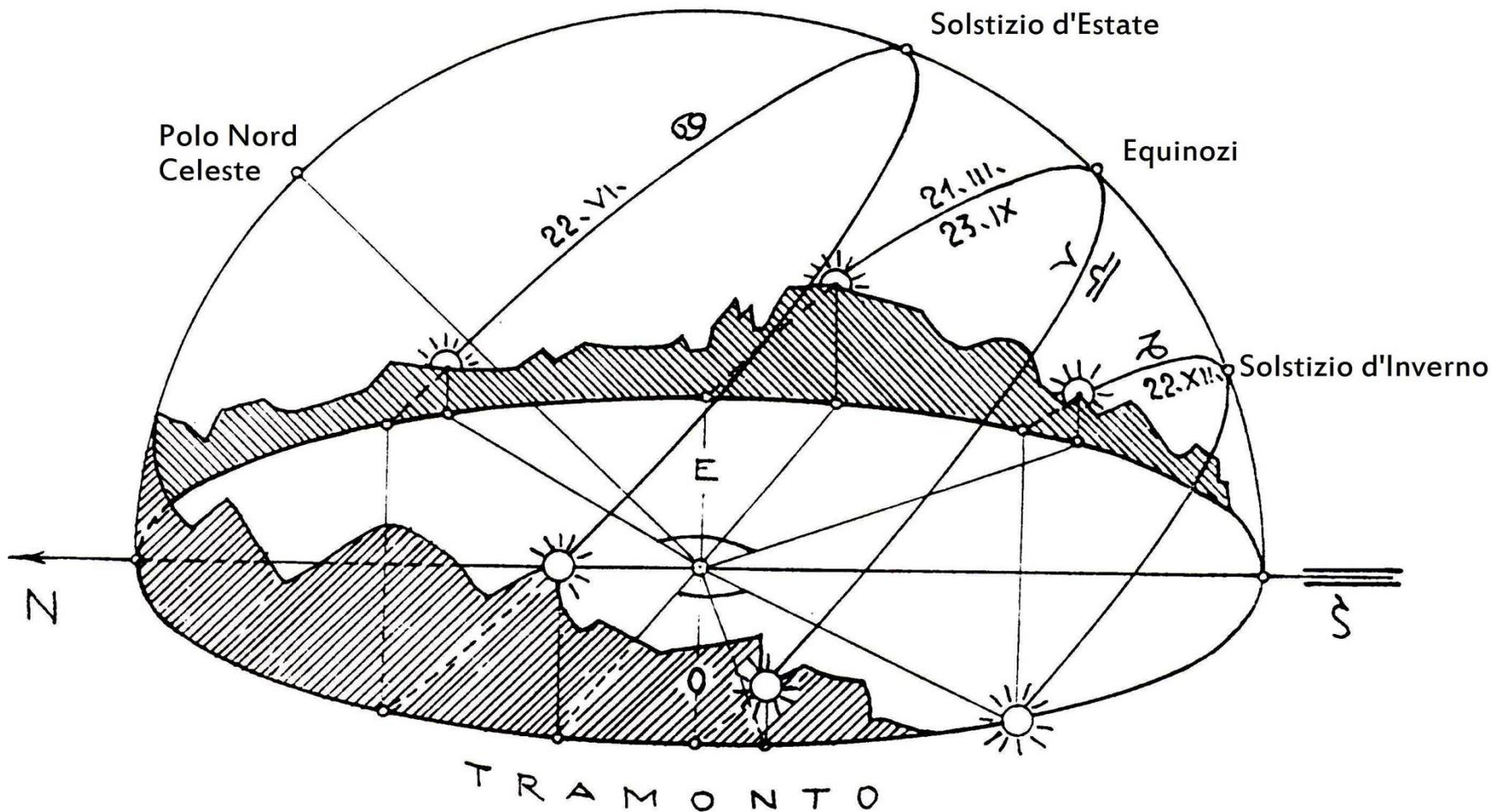
Schiacciamento $f = \frac{a-b}{a} = \frac{1}{298,257223563} = 3,352810665 \cdot 10^{-3}$

Eccentricità prima $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = 8,181919084 \cdot 10^{-2}$

$$e^2 = 6,694379990 \cdot 10^{-3}$$

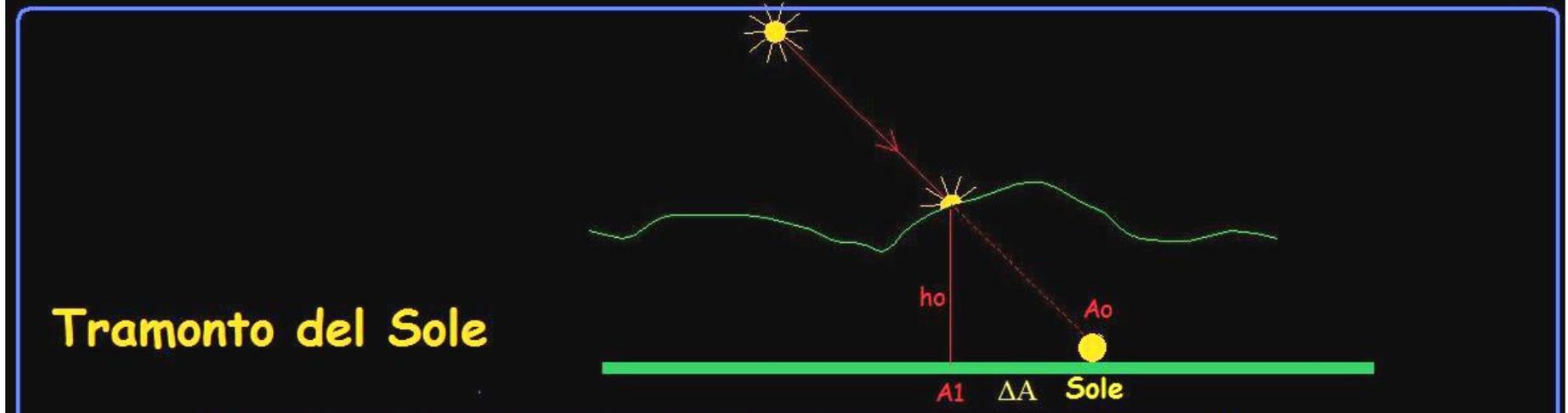
Eccentricità seconda $e' = \sqrt{\frac{e^2}{1-e^2}} = 8,209443795 \cdot 10^{-2}$

$$(e')^2 = 6,739496742 \cdot 10^{-3}$$



Traiettorie apparenti del Sole in una località alpina

Variazione dell'azimut di levata e di tramonto del Sole a causa dell'elevazione dell'orizzonte naturale locale



Lo spostamento in azimut dovuto all'altezza dell'orizzonte naturale locale (montagne, vegetazione) vale: $\Delta A \approx h_o \sin(A) (\tan \varphi)$.
Alla levata l'azimut aumenta: $A_0 < A_1$. Al tramonto l'azimut diminuisce: $A_0 > A_1$.

Relazione tra il Sistema di Coordinate Altazimutali e il Sistema di Coordinate Equatoriali

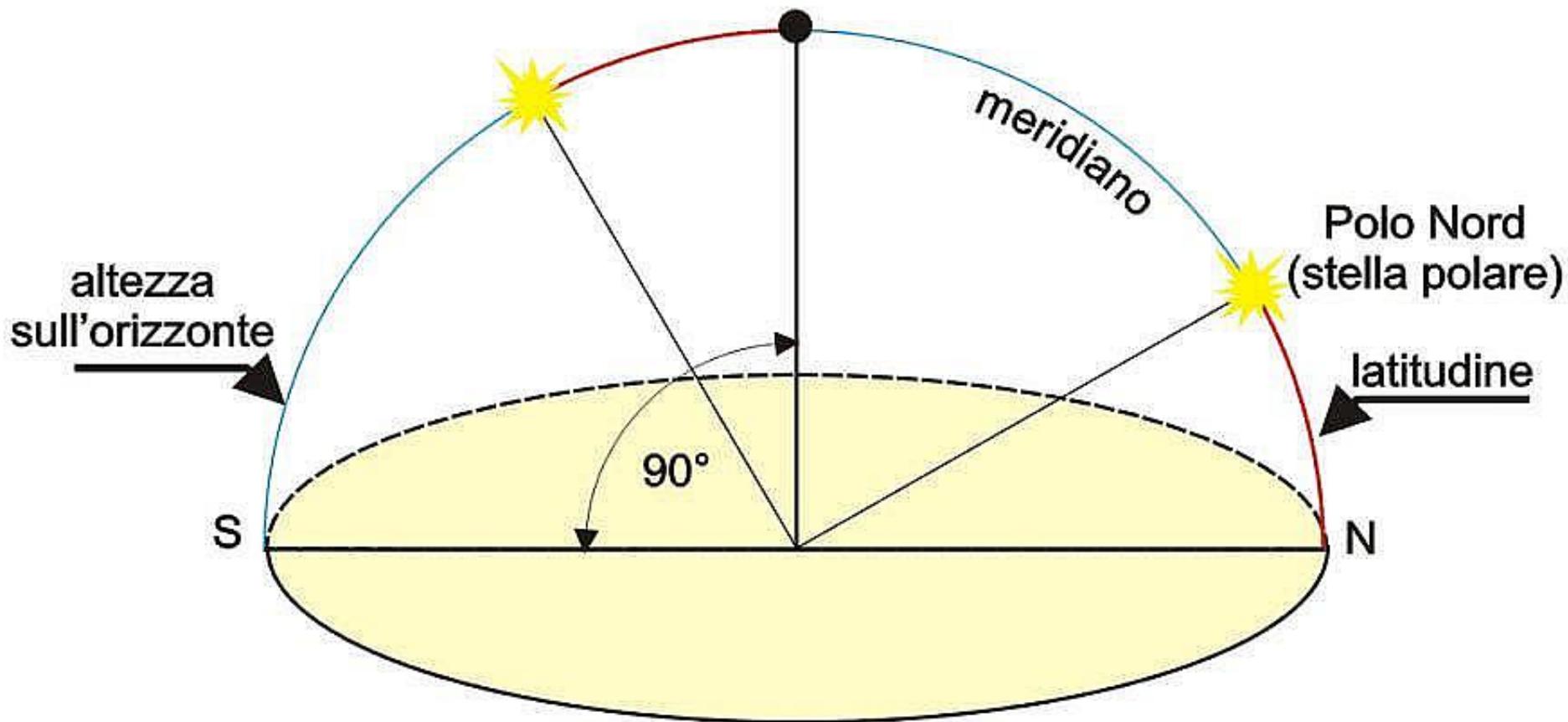
Il primo è il sistema Altazimutale le cui coordinate sono l'Azimut astronomico Az , misurato partendo dalla direzione del Nord astronomico e ruotando positivamente in senso orario verso il punto cardinale Est e l'Altezza angolare h rispetto al cerchio dell'orizzonte astronomico locale, il quale corrisponde esattamente alle condizioni di osservazione di un individuo posto ad una latitudine pari a φ che osserva un determinato astro. Il secondo sistema è quello Equatoriale le cui coordinate sono l'Ascensione Retta AR contata positivamente dal punto γ (il punto dove si trova il Sole all'Equinozio di primavera) e la declinazione δ contata tra -90° e $+90^\circ$ lungo il meridiano astronomico partendo dal cerchio dell'equatore celeste, proiezione dell'equatore terrestre sulla Sfera Celeste. Le formule di passaggio tra i due sistemi sono quelle di Eulero e sono le seguenti:

$$\begin{aligned} \sin(h) &= \sin(\delta) \sin(\varphi) + \cos(\delta) \cos(\varphi) \cos(H) \\ \cos(Az) &= [\sin(\delta) - \sin(\varphi) \sin(h)] / [\cos(\varphi) \cos(h)] \end{aligned}$$

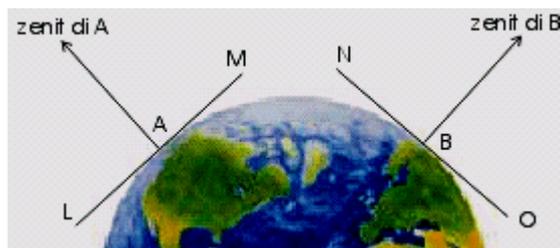
in cui H è l'angolo orario dell'astro.

distanza zenitale

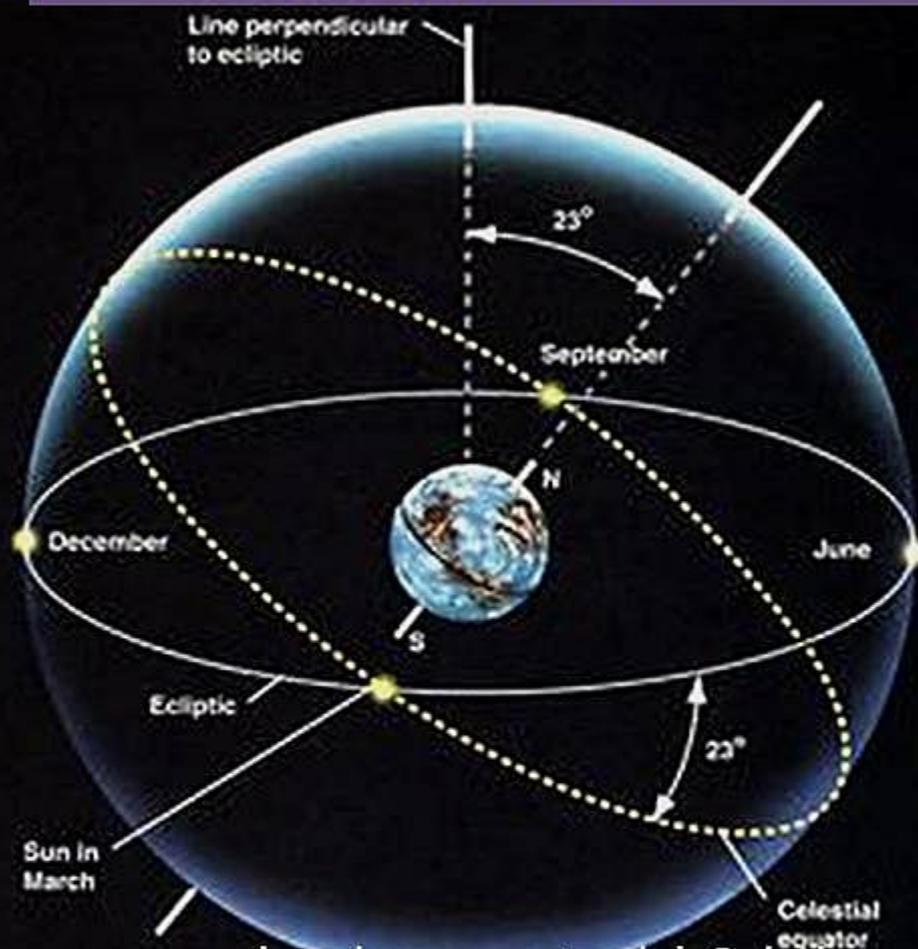
Zenit



*relazione geometrica fra altezza di un astro
in meridiano e latitudine de luogo di osservazione*



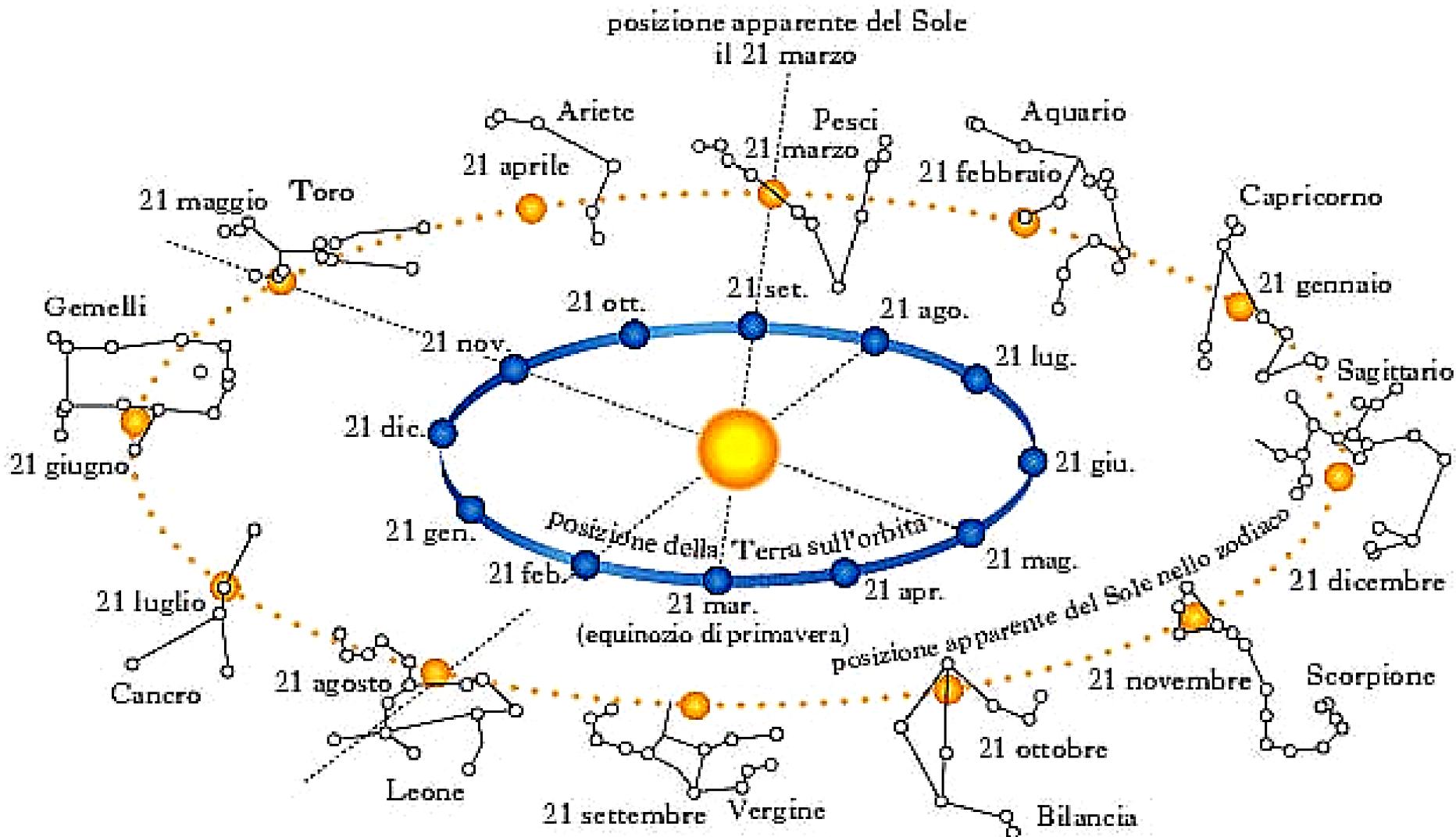
Sfera Celeste

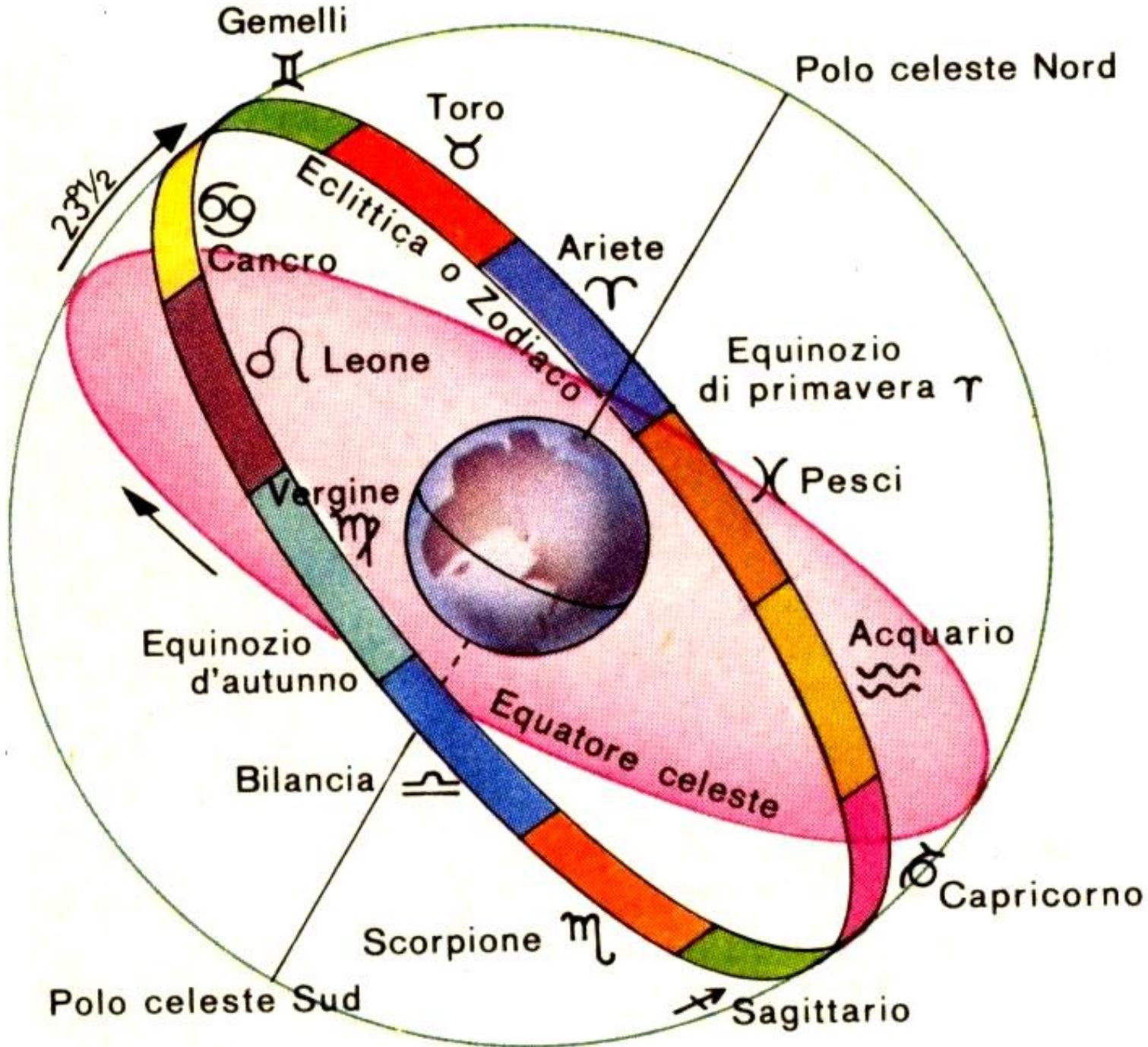


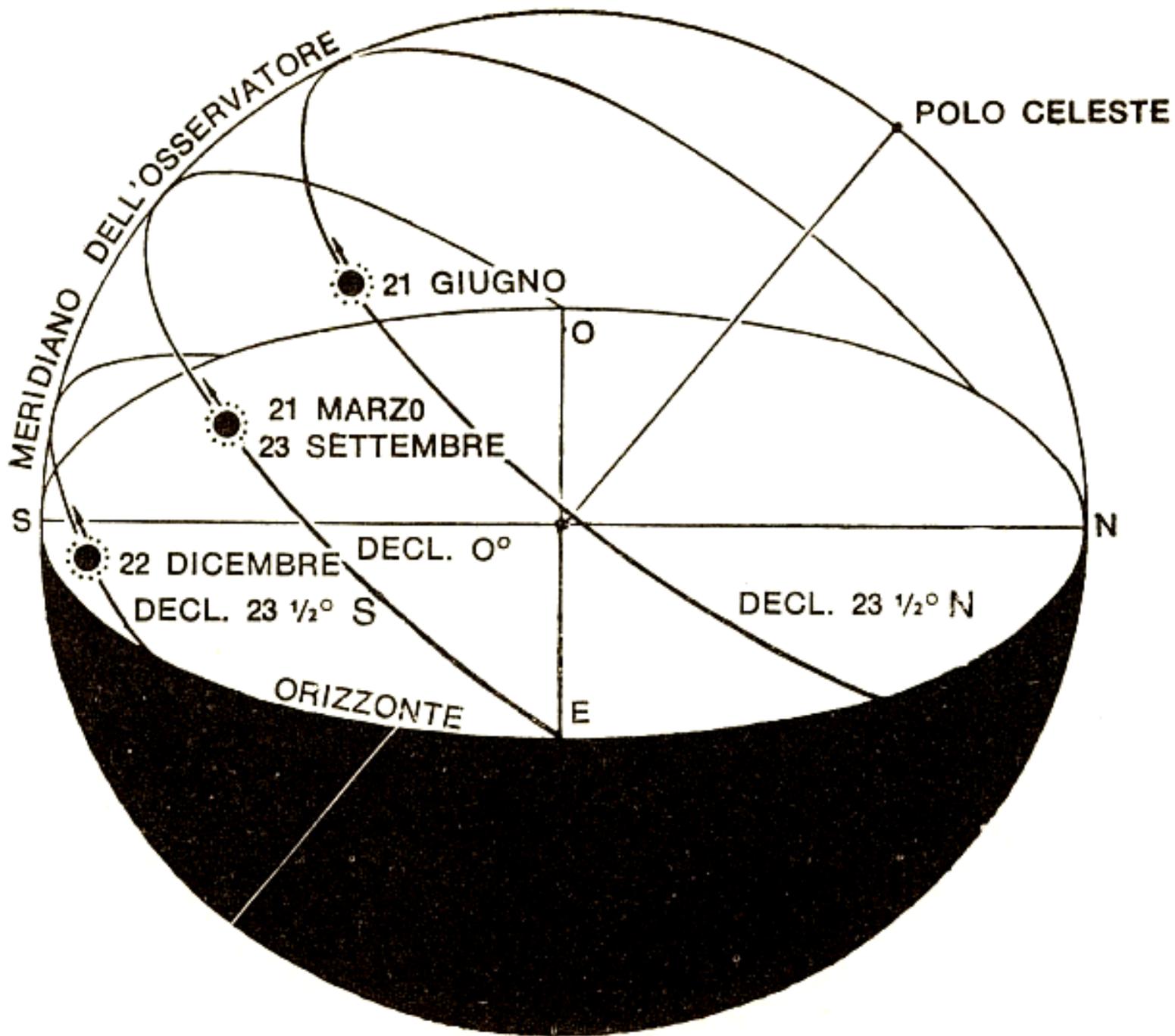
l'**eclittica** - il percorso annuale ed apparente del Sole lungo lo zodiaco, che non è altro che la proiezione celeste del piano orbitale disegnato dalla Terra, e che risulta essere quindi inclinata di $23,5^\circ$ dall'equatore celeste;

il **punto d'ariete** - chiamato anche punto equinoziale, punto gamma o punto vernale, è quel punto della sfera celeste dove appare proiettato il Sole quando la Terra si trova all'equinozio di primavera.

Proiezione del Sole tra le costellazioni zodiacali

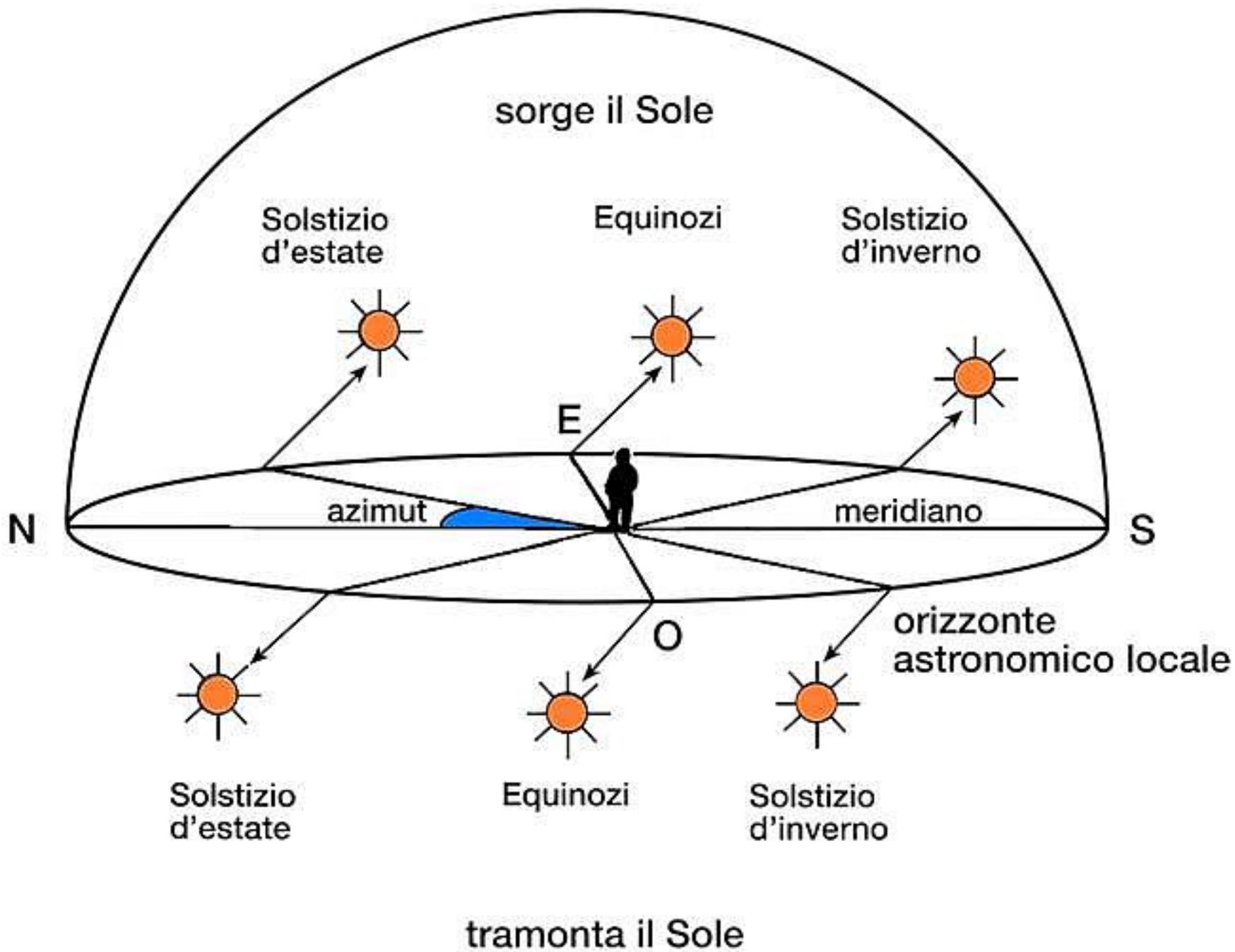




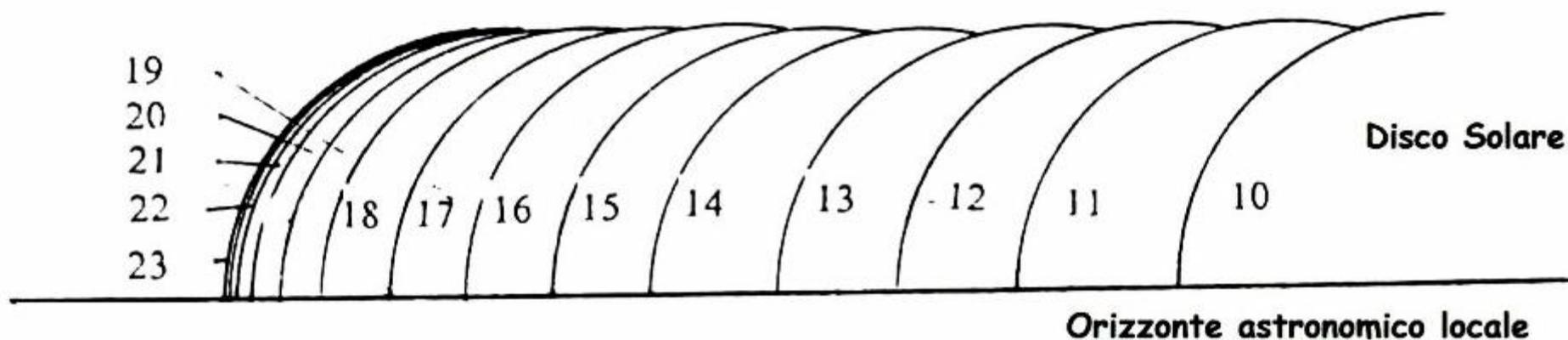


Durata dell'arco notturno del Sole (durata della notte espressa in ore)

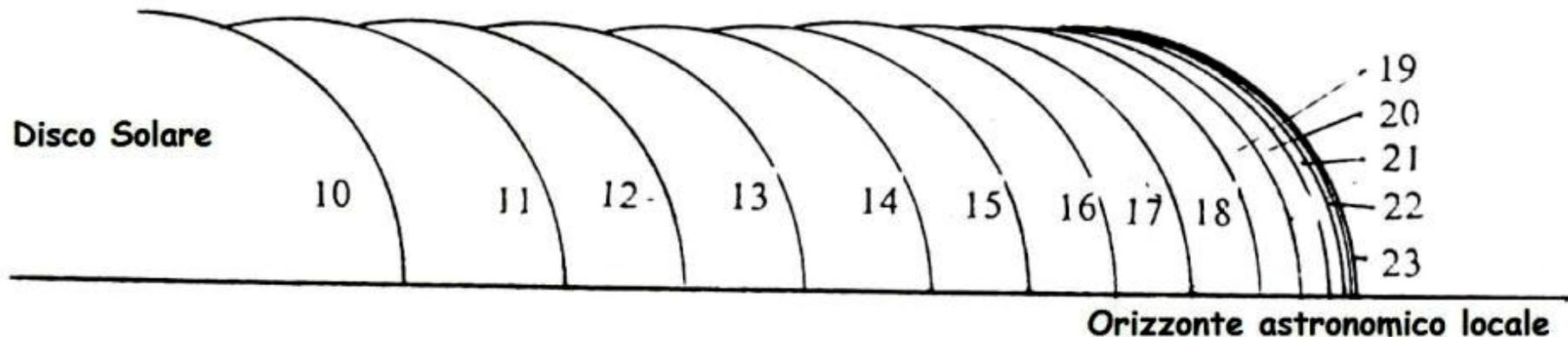
Latitudine (in gradi) Data	- 20	- 10	0	+ 10	+ 20	+ 30	+ 40	+ 50	+ 60	+ 70	+ 80
15 gennaio	10.9	11.5	12.0	12.5	13.1	13.7	14.5	15.7	17.6	24.0	24.0
15 febbraio	11.4	11.7	12.0	12.3	12.6	13.0	13.5	14.1	15.1	17.2	24.0
15 marzo	11.9	12.0	12.0	12.0	12.1	12.2	12.2	12.3	12.5	12.7	13.5
15 aprile	12.5	12.2	12.0	11.8	11.5	11.2	10.9	10.4	9.7	8.2	1.5
15 maggio	13.0	12.5	12.0	11.5	11.0	10.5	9.8	8.8	7.2	2.6	0.0
15 giugno	13.2	12.6	12.0	11.4	10.8	10.1	9.2	7.9	5.6	0.0	0.0
15 luglio	13.2	12.5	12.0	11.5	10.9	10.2	9.4	8.2	6.2	0.0	0.0
15 agosto	12.7	12.3	12.0	11.7	11.3	10.9	10.4	9.6	8.5	6.1	0.0
15 settembre	12.1	12.1	12.0	11.9	11.9	11.8	11.7	11.5	11.3	10.9	9.8
15 ottobre	11.6	11.8	12.0	12.2	12.4	12.7	13.0	13.4	14.1	15.4	20.4
15 novembre	11.1	11.5	12.0	12.5	12.9	13.5	14.2	15.2	16.8	21.0	24.0
15 dicembre	10.8	11.4	12.0	12.6	13.2	13.9	14.8	16.1	18.4	24.0	24.0



Levata del Sole al Solstizio d'Estate



Il lento movimento giornaliero del Sole quando sorge all'orizzonte vicino al solstizio d'estate. Solo accurate osservazioni consentono di stabilire esattamente la data di questo evento con questo metodo. I numeri indicano i giorni di Giugno

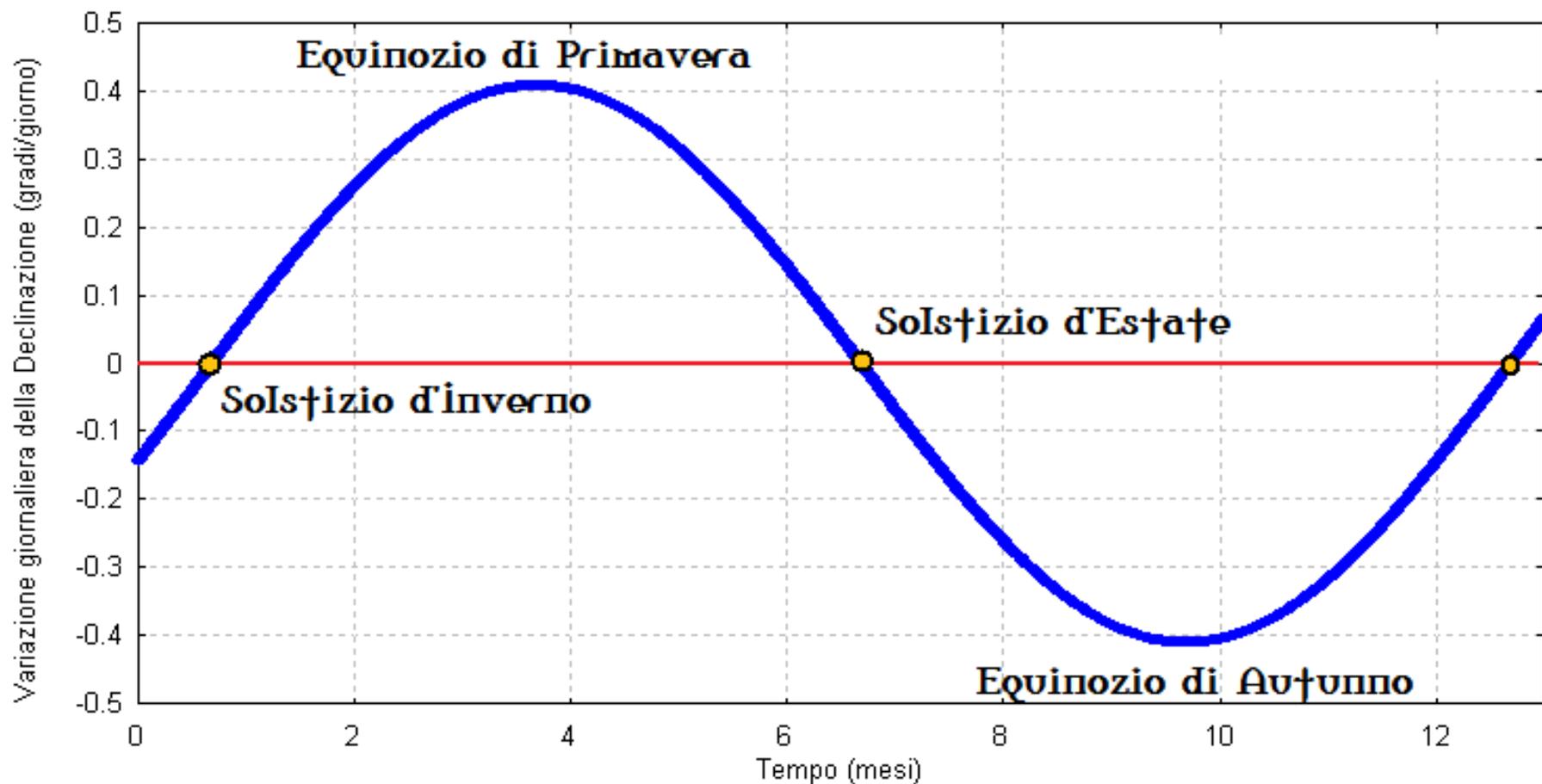


Il lento movimento giornaliero del Sole quando sorge all'orizzonte vicino al solstizio invernale. Solo accurate osservazioni consentono di stabilire esattamente la data di questo evento con questo metodo (i numeri indicano i giorni di Dicembre).

Azimut astronomico di levata del Sole
Latitudine Geografica = 46° N

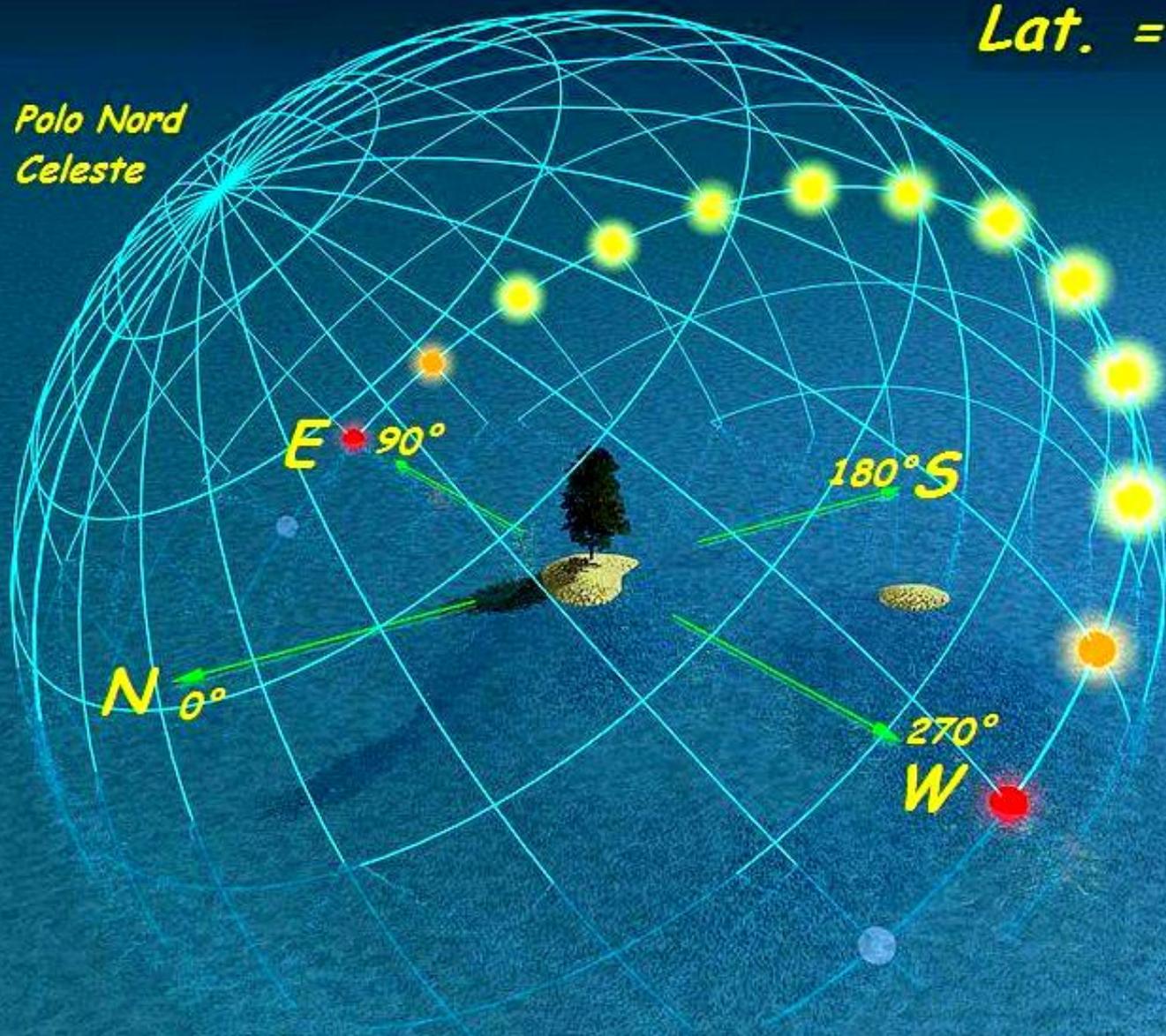


Variazione giornaliera della declinazione del Sole

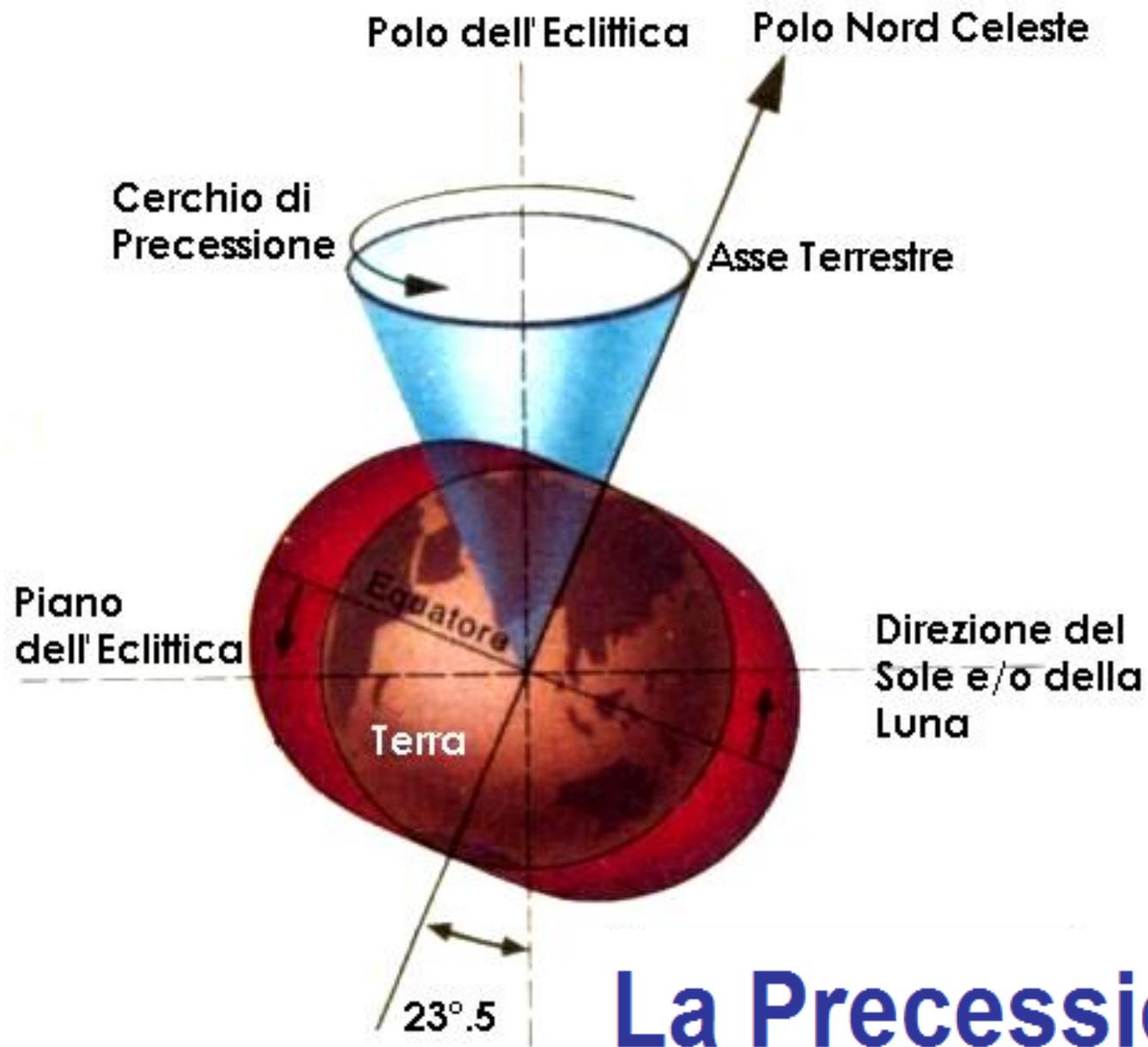


Lat. = 45°

*Polo Nord
Celeste*

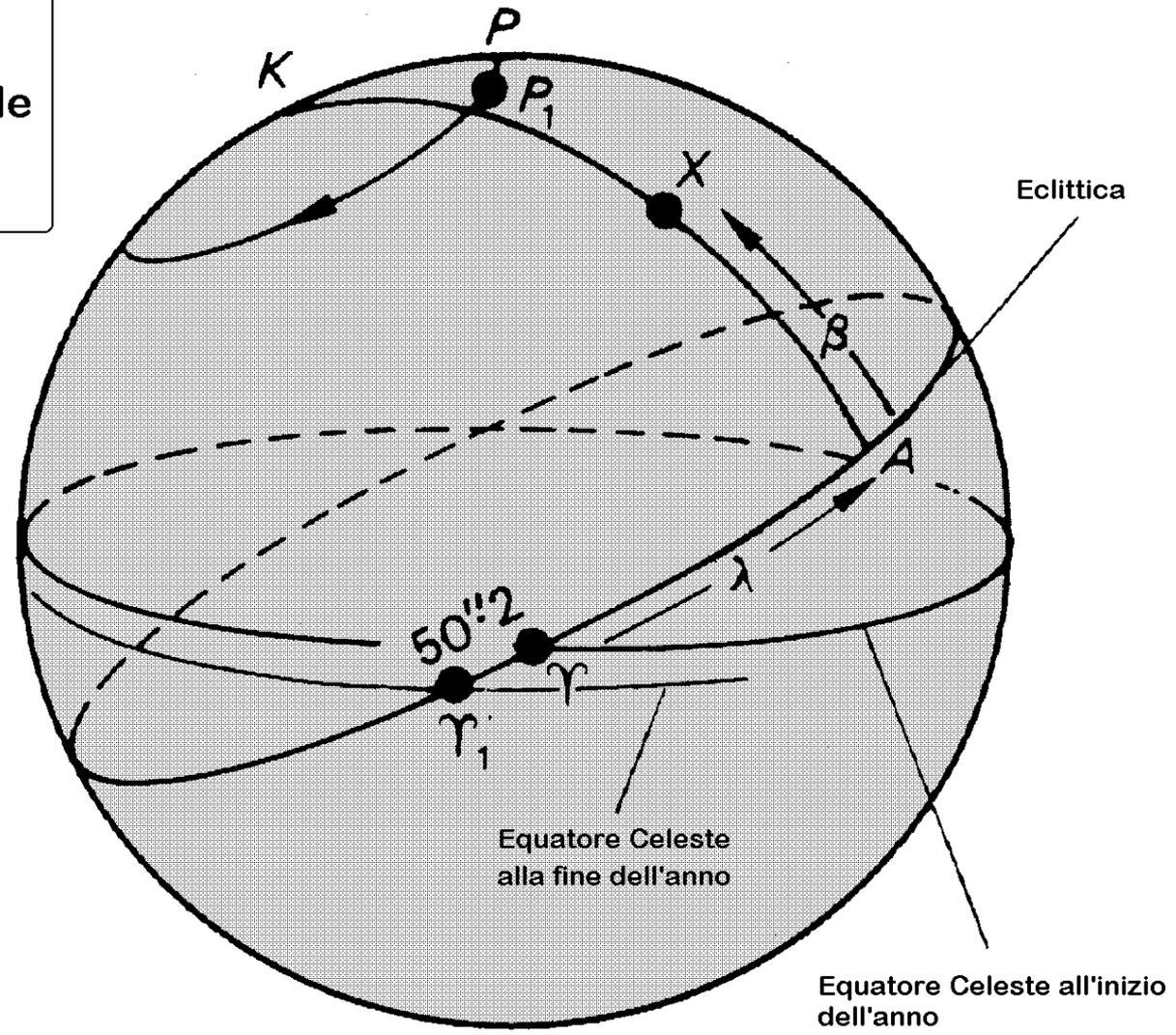


Traiettoria apparente del Sole agli Equinozi

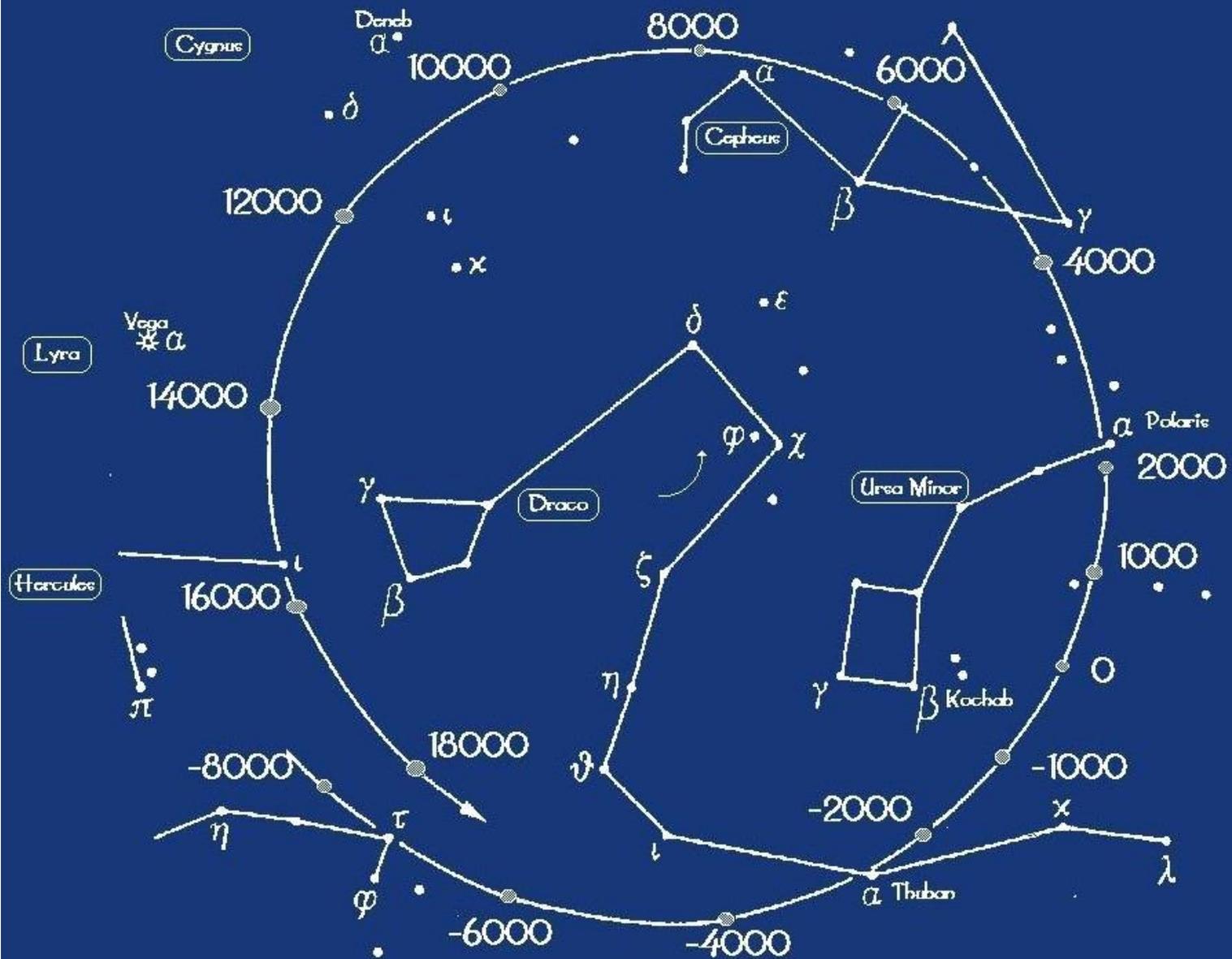


La Precessione

Variazione della
posizione del punto
Equinoziale Primaverile
per effetto della
Precessione



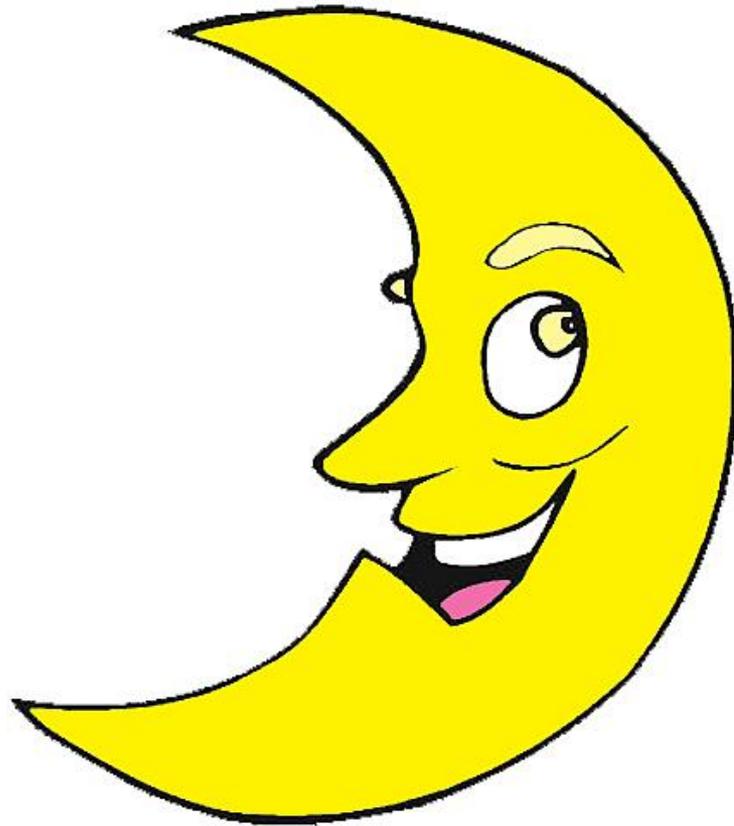
**Spostamento precessionale:
1° di Longitudine Eclittica in 72 anni solari tropici**



Precessione: varia la posizione di sorgere e tramontare delle stelle all'orizzonte astronomico locale.

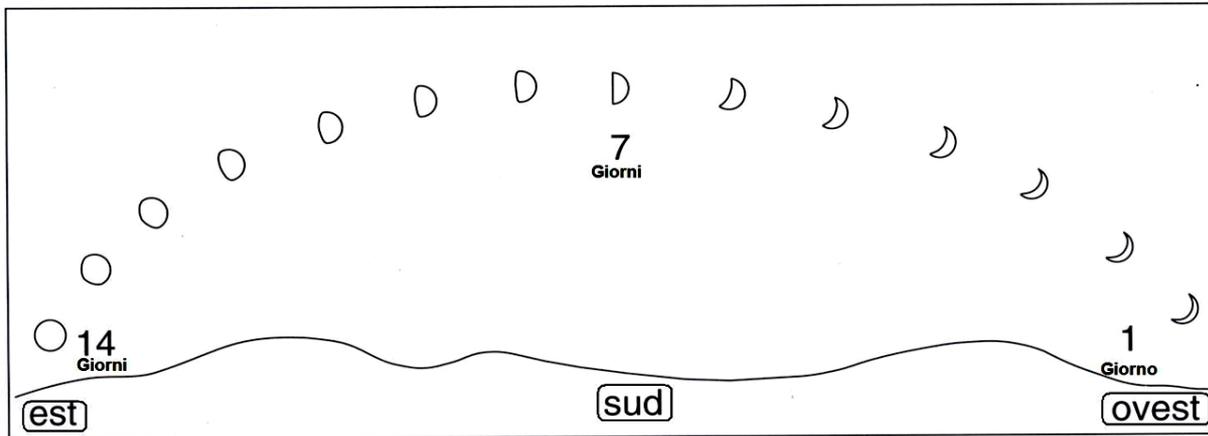
Variazione dell'obliquità dell'eclittica: varia la posizione di sorgere e di tramontare del Sole e della Luna all'orizzonte astronomico locale

La Luna

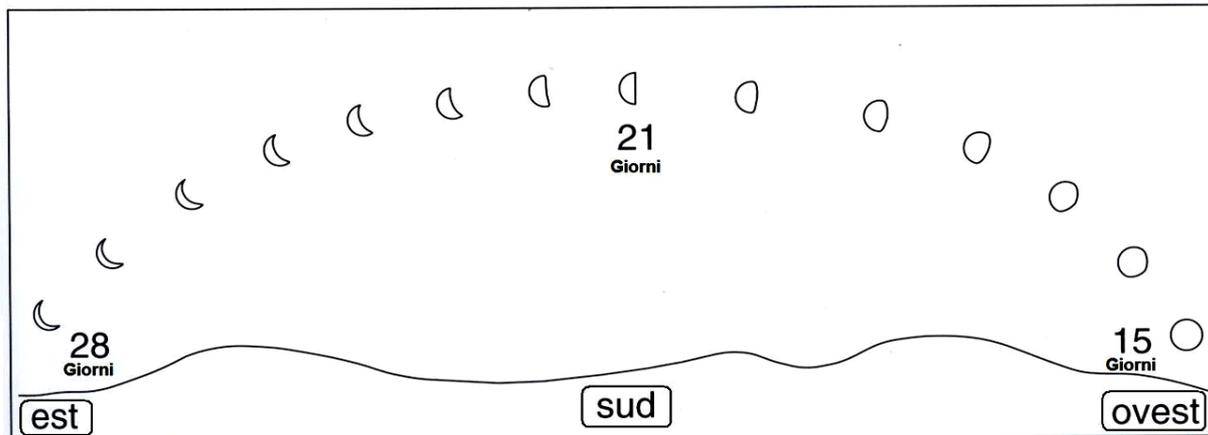


Phases of the Moon

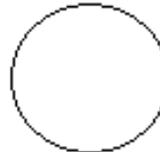
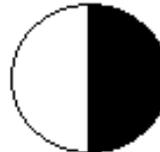


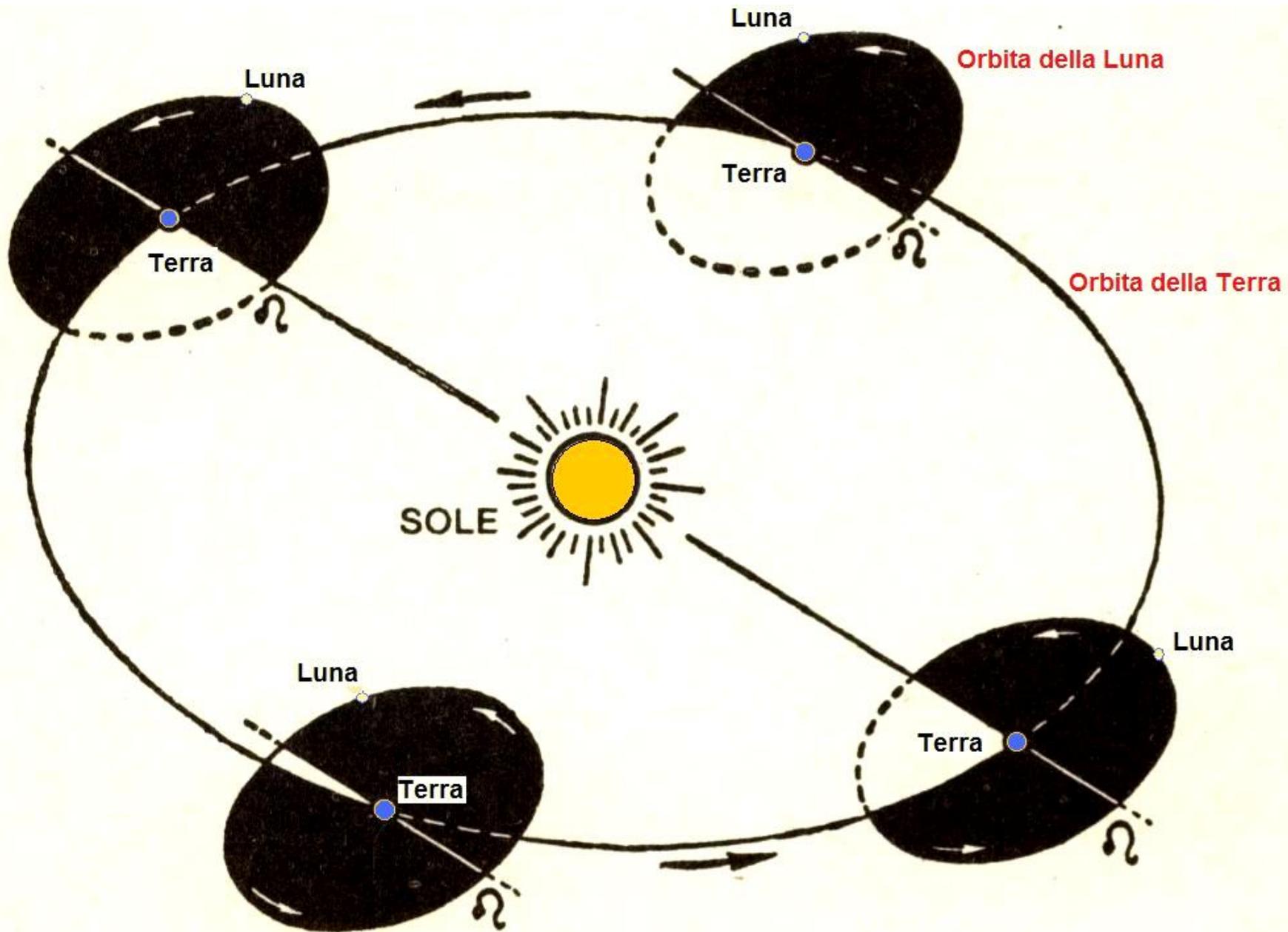


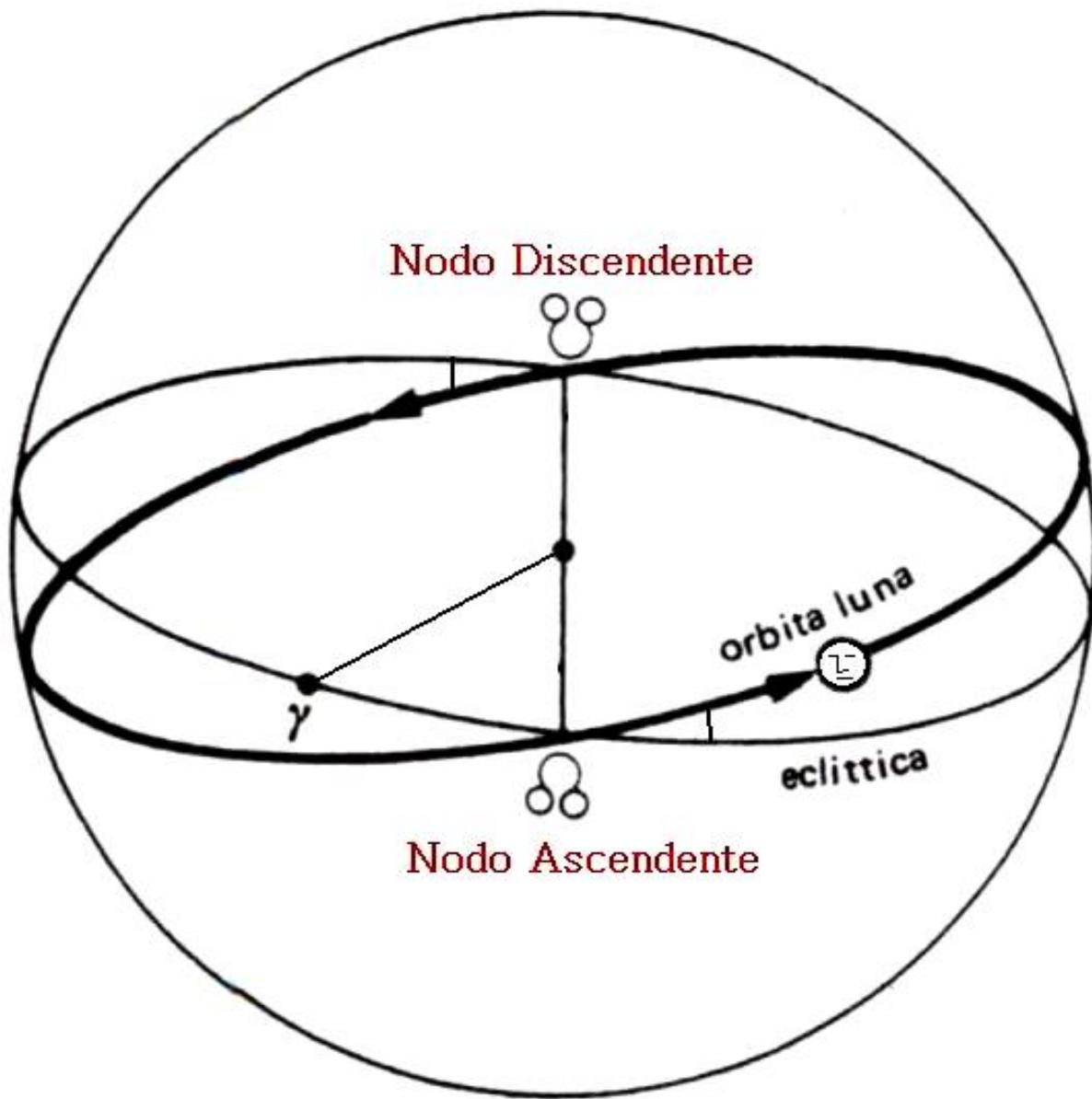
**Visibilità della Luna durante la prima metà del mese sinodico lunare:
aspetto e posizione della Luna nel cielo al tramonto del Sole**



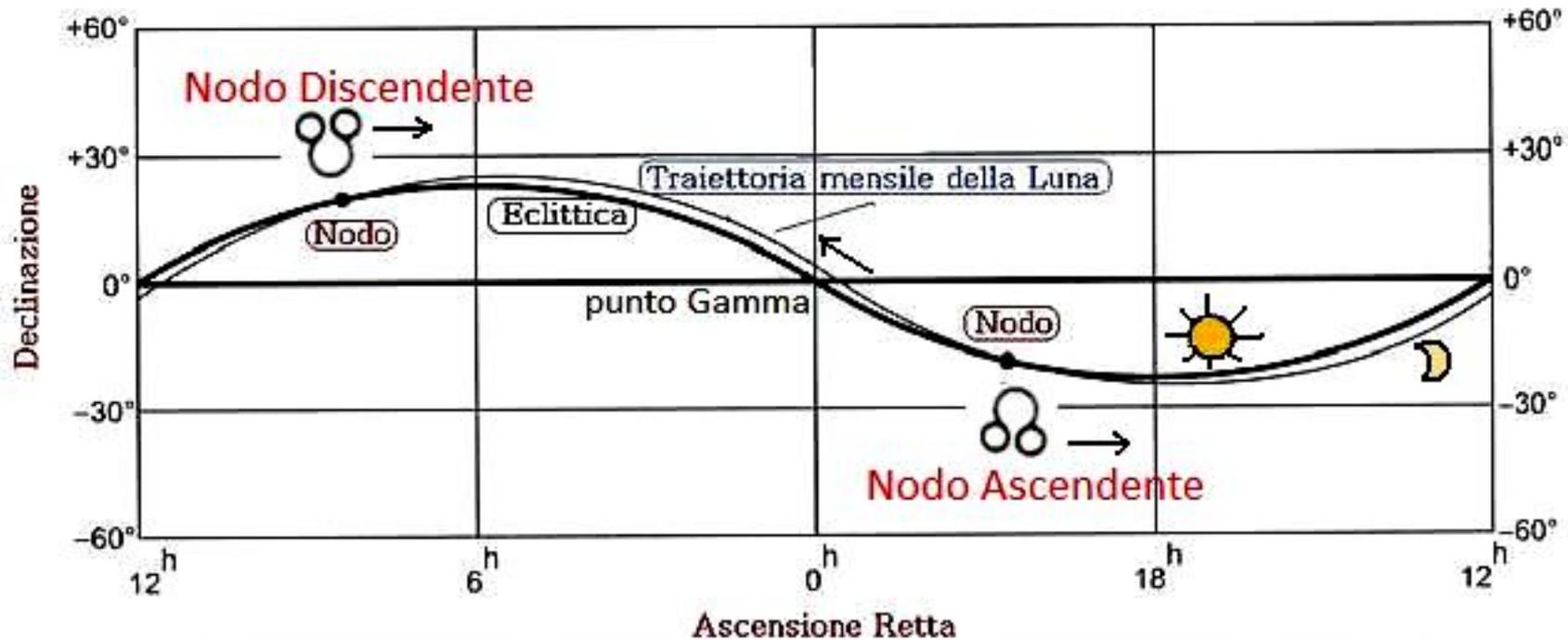
**Visibilità della Luna durante la seconda metà del mese sinodico lunare:
aspetto e posizione della Luna nel cielo all'alba**

	Fase	Sorge ore	Meridiano ore	Tramonta ore
	Novilunio	6:00	12:00	18:00
	Primo Quarto	12:00	18:00	24:00
	Plenilunio	18:00	24:00	6:00
	Ultimo Quarto	24:00	6:00	12:00
	Novilunio	6:00	12:00	18:00

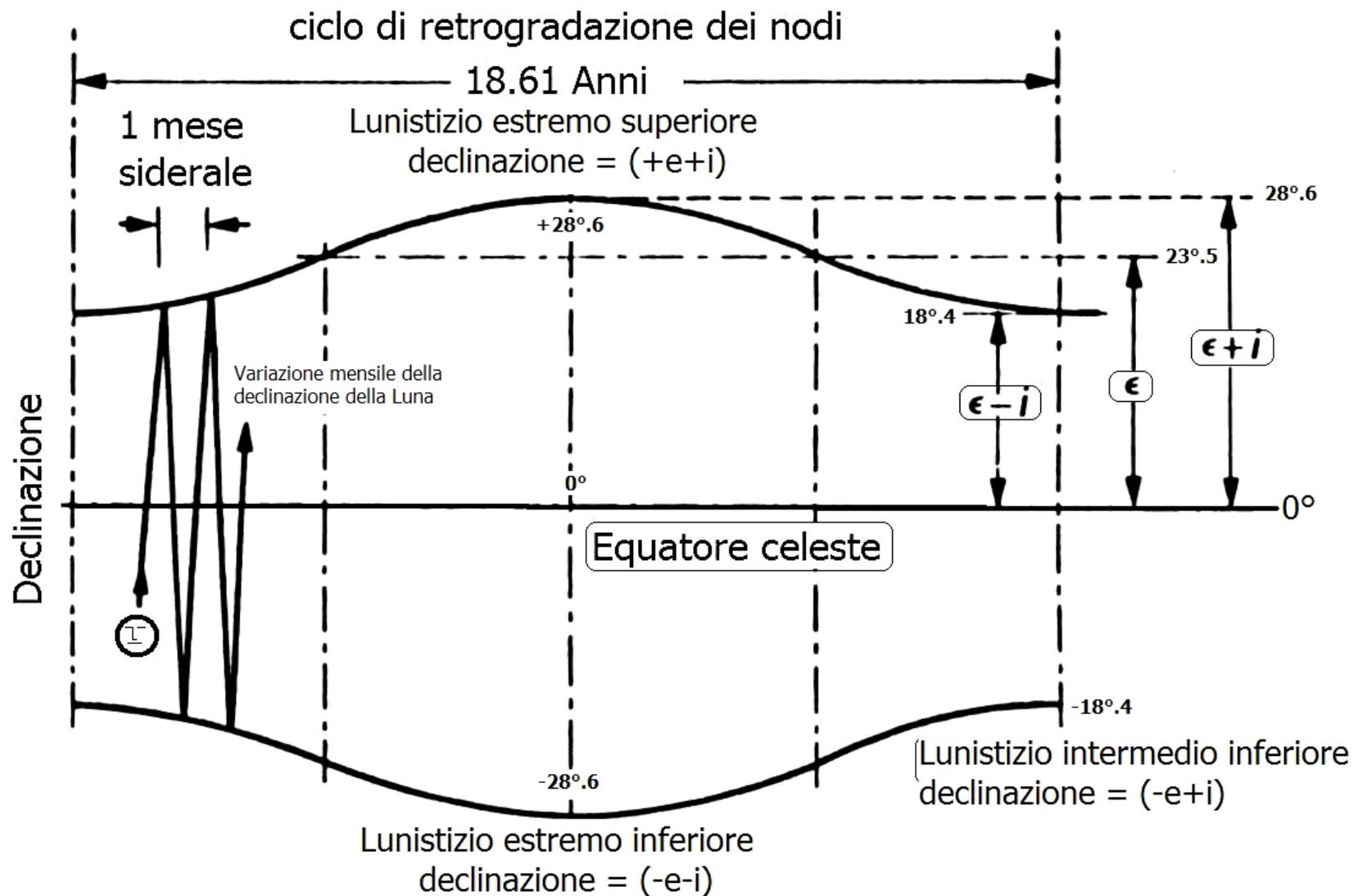




Traiettoria Mensile della Luna lungo l'Eclittica



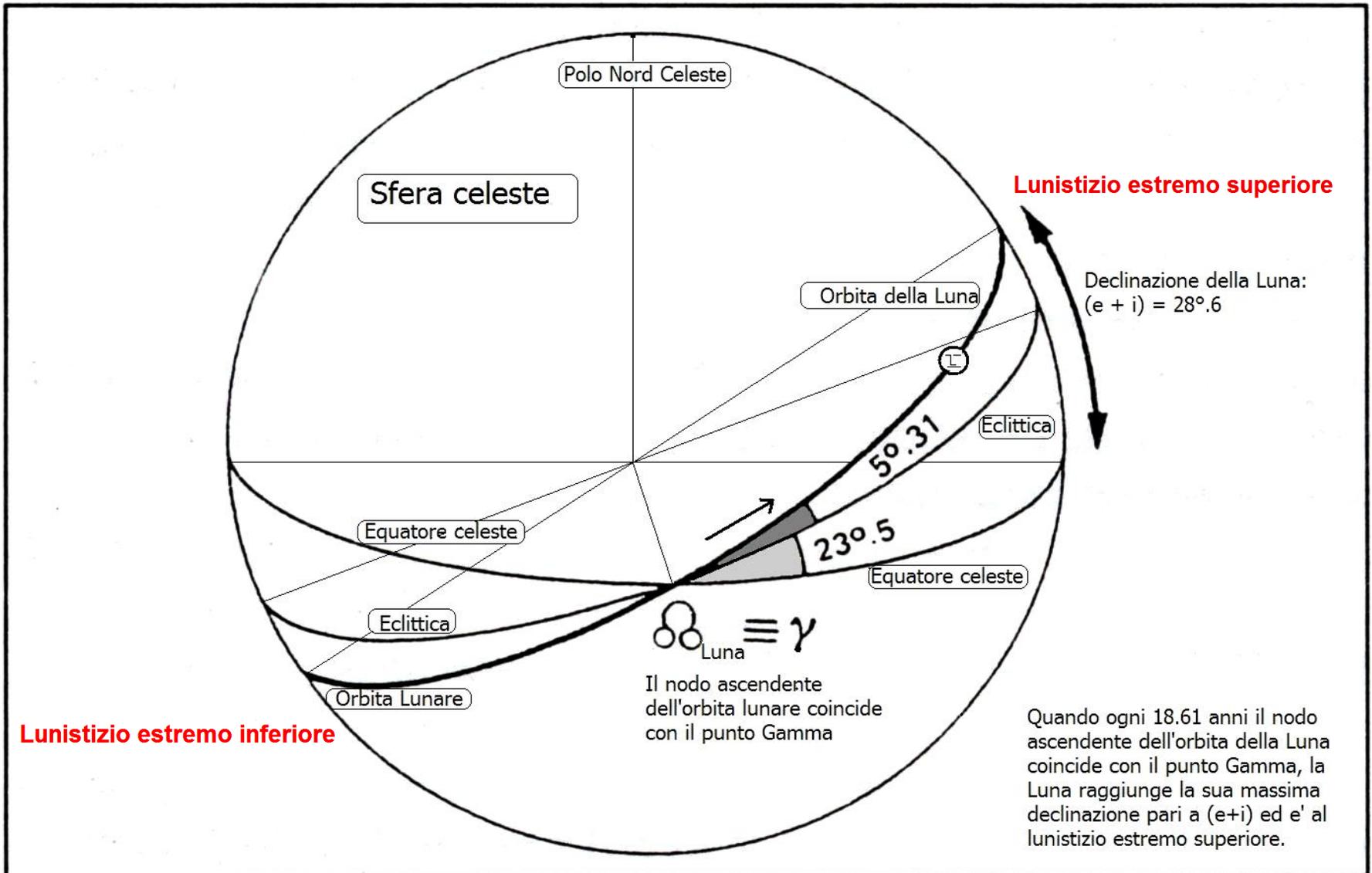
- mese sinodico:	29,5306	"	"	"
- mese draconitico:	27,2122	"	"	"



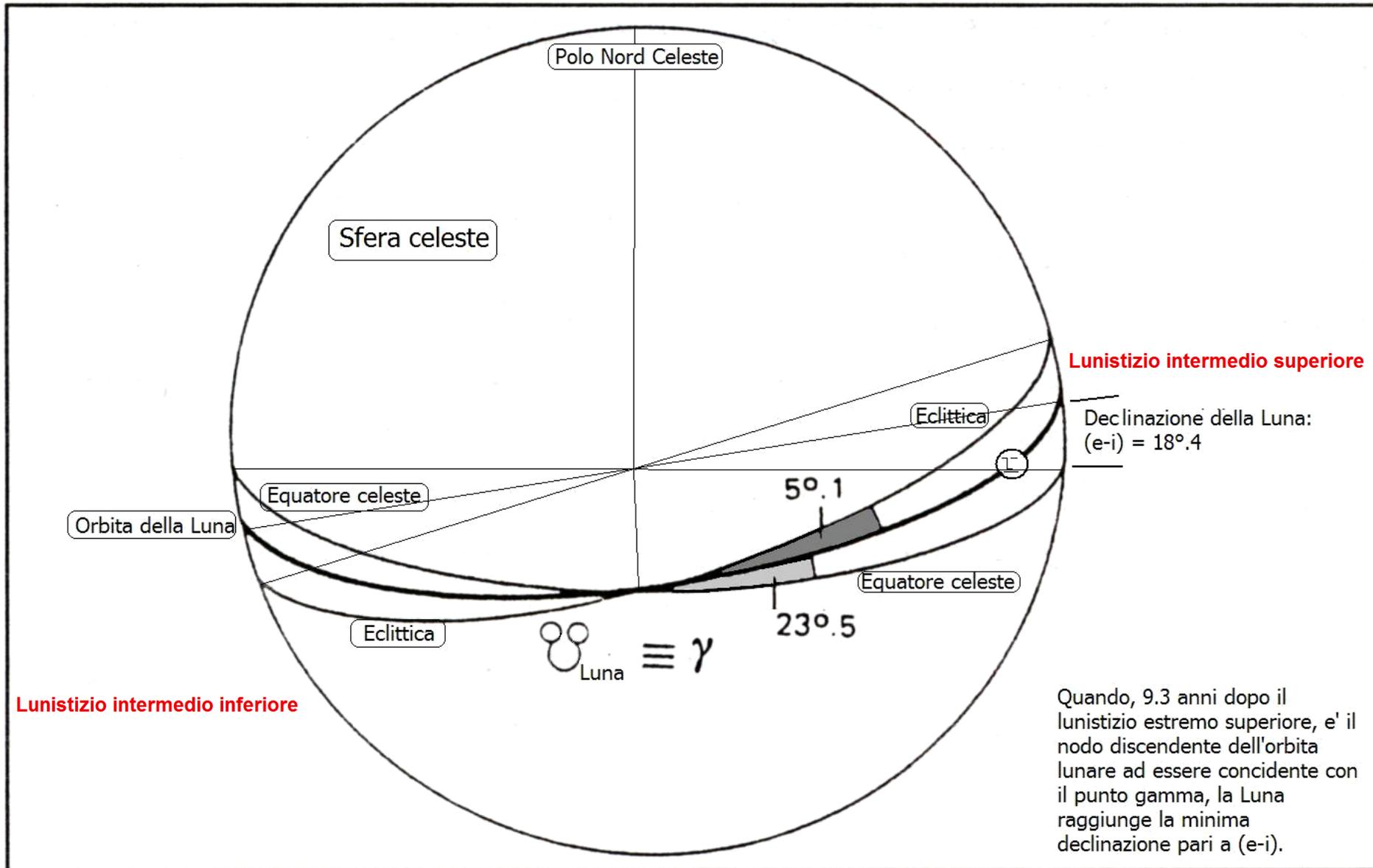
Variazione periodica della declinazione della Luna in 18.6 anni solari tropici corrispondente ad 1 ciclo di retrogradazione dei nodi. Ogni mese siderale lunare la declinazione della Luna oscilla entro gli estremi stabiliti dalla posizione dei nodi in quel mese ed indicati, nella figura, dalle due curve simmetriche poste una sopra ed una sotto la linea dell'equatore celeste.

I valori di massima e minima declinazione lunare sono soggetti anche ad una variazione periodica con un periodo pari a 173.3 giorni a causa della variazione dell'inclinazione della sua orbita.

Lunistizi estremi



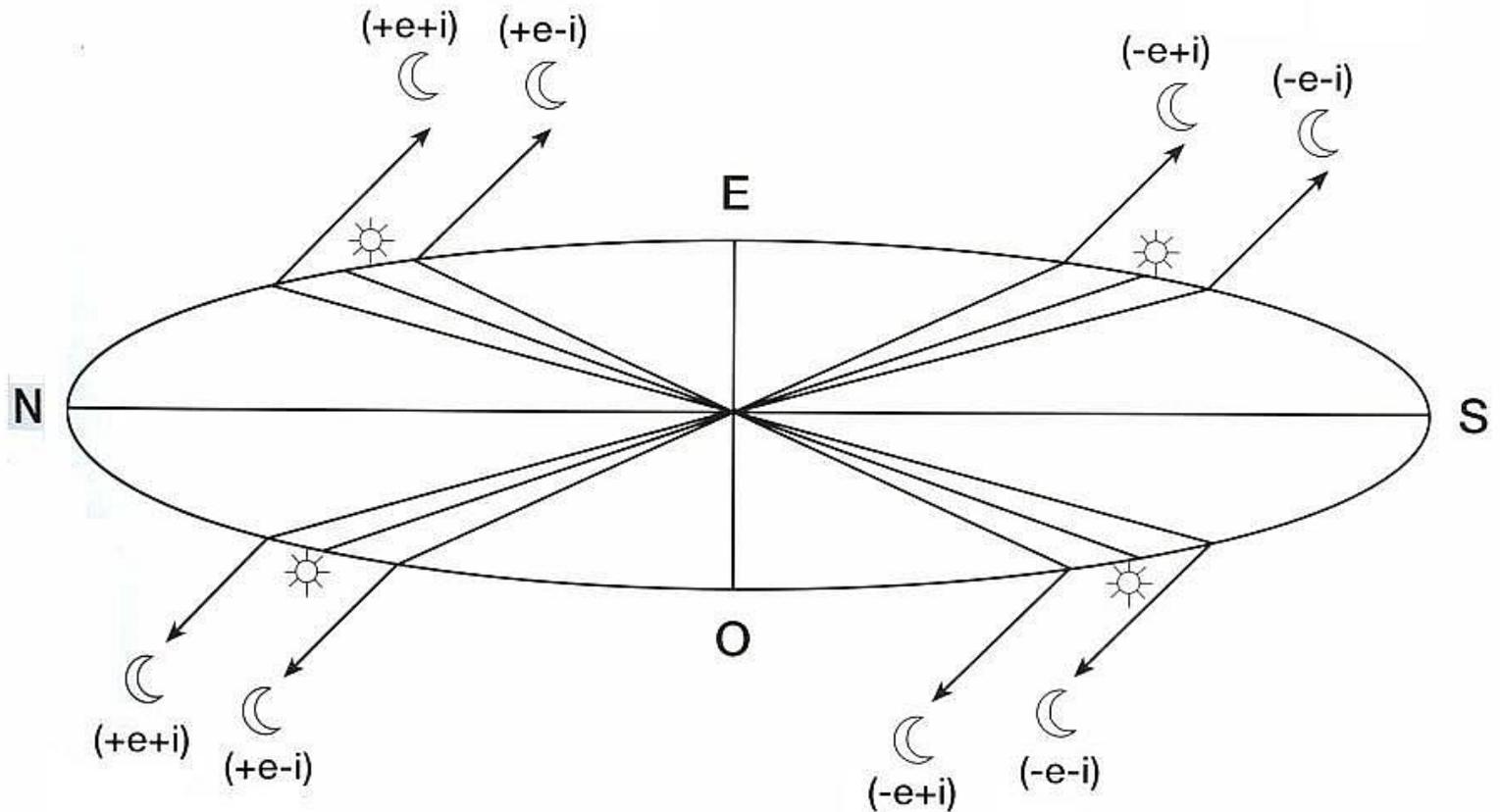
Lunistizi intermedi



sorge la Luna

Lunistizi superiori

Lunistizi inferiori



Lunistizi superiori

Lunistizi inferiori

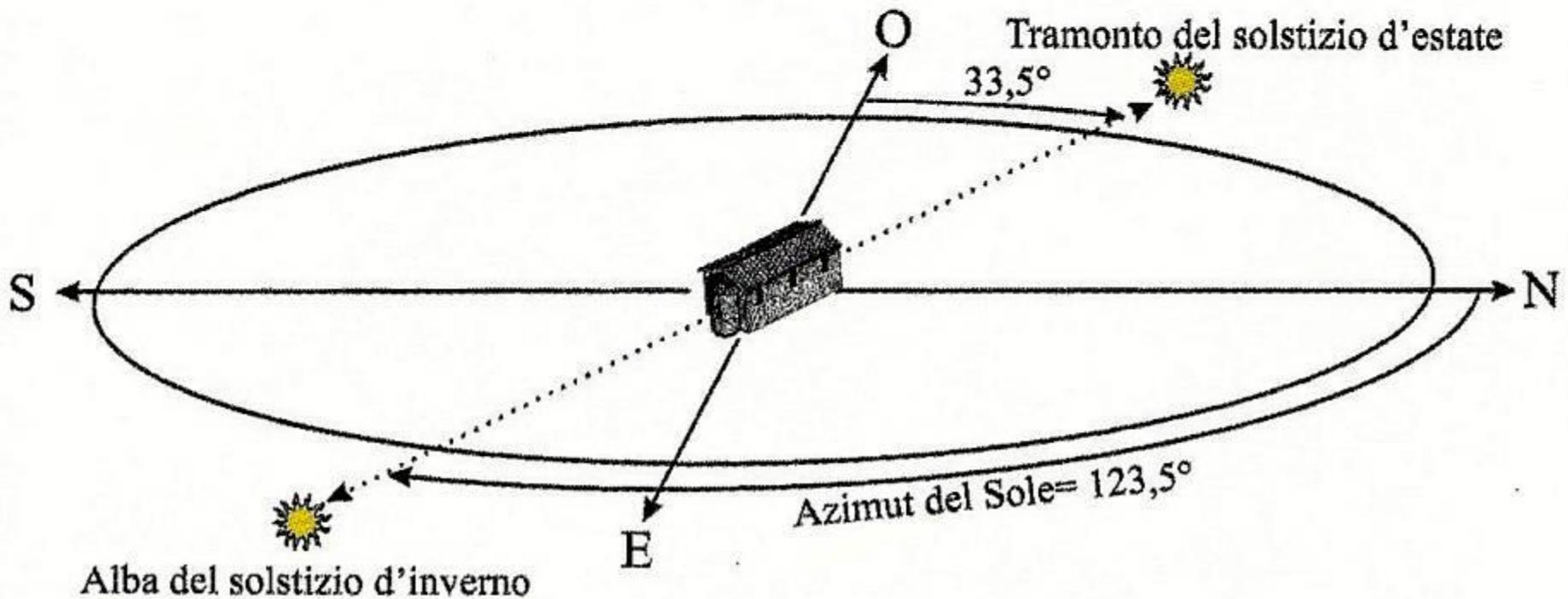
tramonta la Luna

**Years of Major and Minor Geocentric Standstills
of the Moon from BC4000 to AD2500.**

Major Standstill (Positive Decl.) D=(+ε+i)	Minor Standstill Negative Decl.) D=(-ε-i)	Nodal Period	Major Standstill (Positive Decl.) D=(+ε+i)	Minor Standstill Negative Decl.) D=(-ε-i)	Nodal Period	Major Standstill (Positive Decl.) D=(+ε+i)	Minor Standstill Negative Decl.) D=(-ε-i)	Nodal Period
Year	Year	Pn(years)	Year	Year	Pn(years)	Year	Year	Pn(years)
-339.6	-339.6	18.610970	256.5	256.6	18.613170	852.4	852.5	18.615830
-321.0	-320.9	18.611030	275.2	275.2	18.613250	871.1	871.1	18.615920
-302.3	-302.3	18.611100	293.8	293.8	18.613330	889.7	889.7	18.616010
-283.7	-283.7	18.611160	312.4	312.4	18.613400	908.3	908.3	18.616110
-265.1	-265.0	18.611220	331.0	331.1	18.613480	926.9	926.9	18.616200
-246.5	-246.4	18.611290	349.7	349.7	18.613560	945.5	945.6	18.616290
-227.8	-227.8	18.611350	368.3	368.3	18.613640	964.1	964.2	18.616380
-209.2	-209.2	18.611410	386.9	387.0	18.613720	982.8	982.8	18.616480
-190.6	-190.5	18.611480	405.5	405.6	18.613790	1001.4	1001.4	18.616570
-171.9	-171.9	18.611540	424.2	424.2	18.613870	1020.0	1020.0	18.616660
-153.3	-153.3	18.611610	442.8	442.8	18.613950	1038.6	1038.6	18.616760
-134.7	-134.6	18.611680	461.4	461.4	18.614040	1057.2	1057.2	18.616850
-116.0	-116.0	18.611740	480.0	480.1	18.614120	1075.8	1075.9	18.616950
-97.4	-97.4	18.611810	498.7	498.7	18.614200	1094.4	1094.5	18.617050
-78.8	-78.7	18.611880	517.3	517.3	18.614280	1113.0	1113.1	18.617140
-60.2	-60.1	18.611950	535.9	535.9	18.614360	1131.7	1131.7	18.617240
-41.5	-41.5	18.612010	554.5	554.6	18.614450	1150.3	1150.3	18.617340
-22.9	-22.9	18.612080	573.2	573.2	18.614530	1168.9	1168.9	18.617430
-4.3	-4.2	18.612150	591.8	591.8	18.614610	1187.5	1187.5	18.617530
14.4	14.4	18.612220	610.4	610.4	18.614700	1206.1	1206.1	18.617630
33.0	33.0	18.612290	629.0	629.1	18.614780	1224.7	1224.7	18.617730
51.6	51.7	18.612360	647.6	647.7	18.614870	1243.3	1243.4	18.617830
70.3	70.3	18.612440	666.3	666.3	18.614950	1261.9	1262.0	18.617930
88.9	88.9	18.612510	684.9	684.9	18.615040	1280.5	1280.6	18.618030
107.5	107.5	18.612580	703.5	703.5	18.615130	1299.1	1299.2	18.618130
126.1	126.2	18.612650	722.1	722.2	18.615210	1317.7	1317.8	18.618230
144.8	144.8	18.612720	740.7	740.8	18.615300	1336.4	1336.4	18.618330
163.4	163.4	18.612800	759.4	759.4	18.615390	1355.0	1355.0	18.618430
182.0	182.1	18.612870	778.0	778.0	18.615480	1373.6	1373.6	18.618540
200.6	200.7	18.612950	796.6	796.6	18.615560	1392.2	1392.2	18.618640
219.3	219.3	18.613020	815.2	815.2	18.615650	1410.8	1410.8	18.618740
237.9	237.9	18.613100	833.8	833.9	18.615740	1429.4	1429.4	18.618850

Allineamenti

"un allineamento è un segmento orientato che interseca la linea dell'orizzonte astronomico locale in un punto".



ΔA = angolo orizzontale

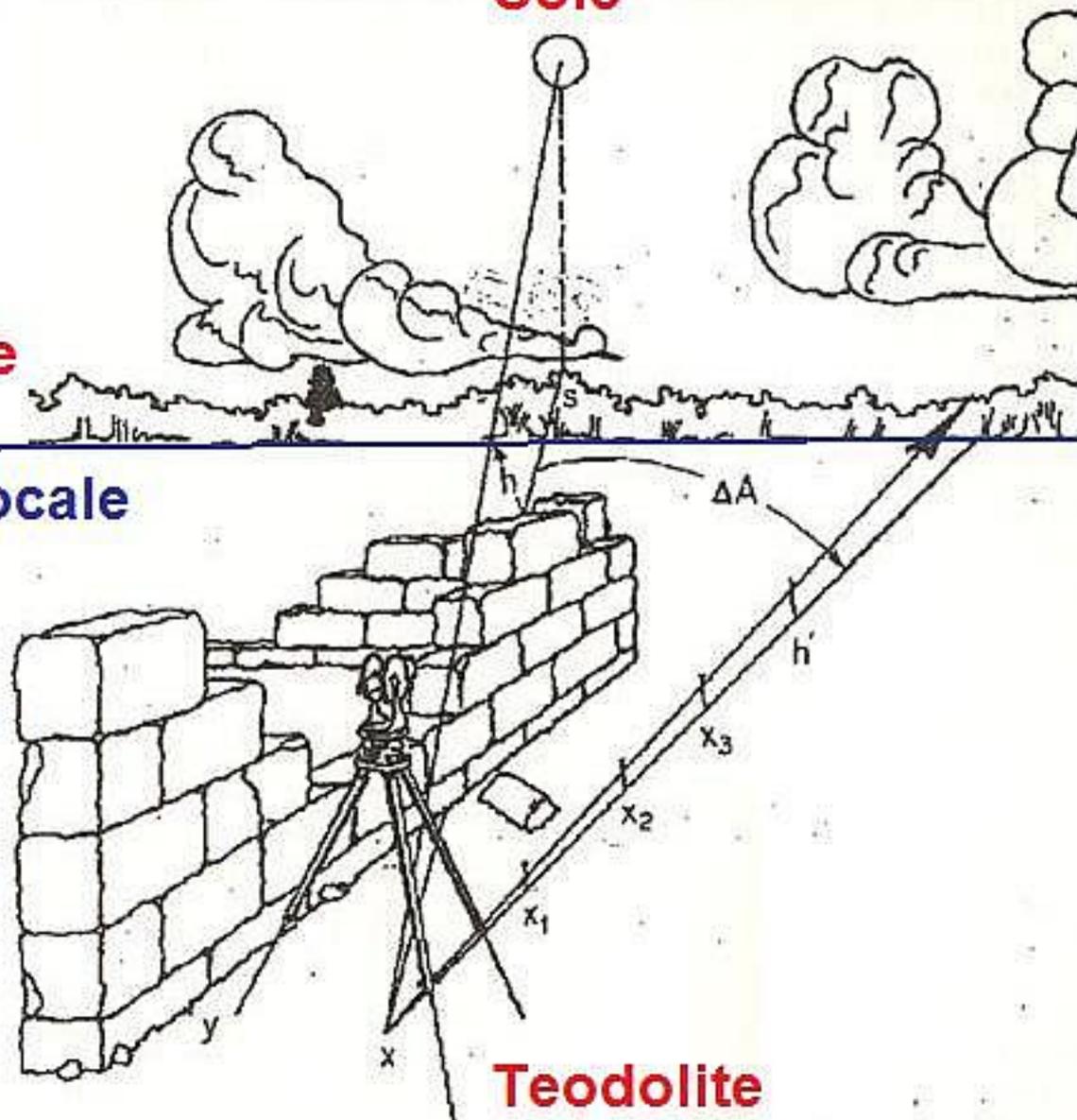
h = altezza skyline

Sole

Orizzonte naturale locale
(Skyline)

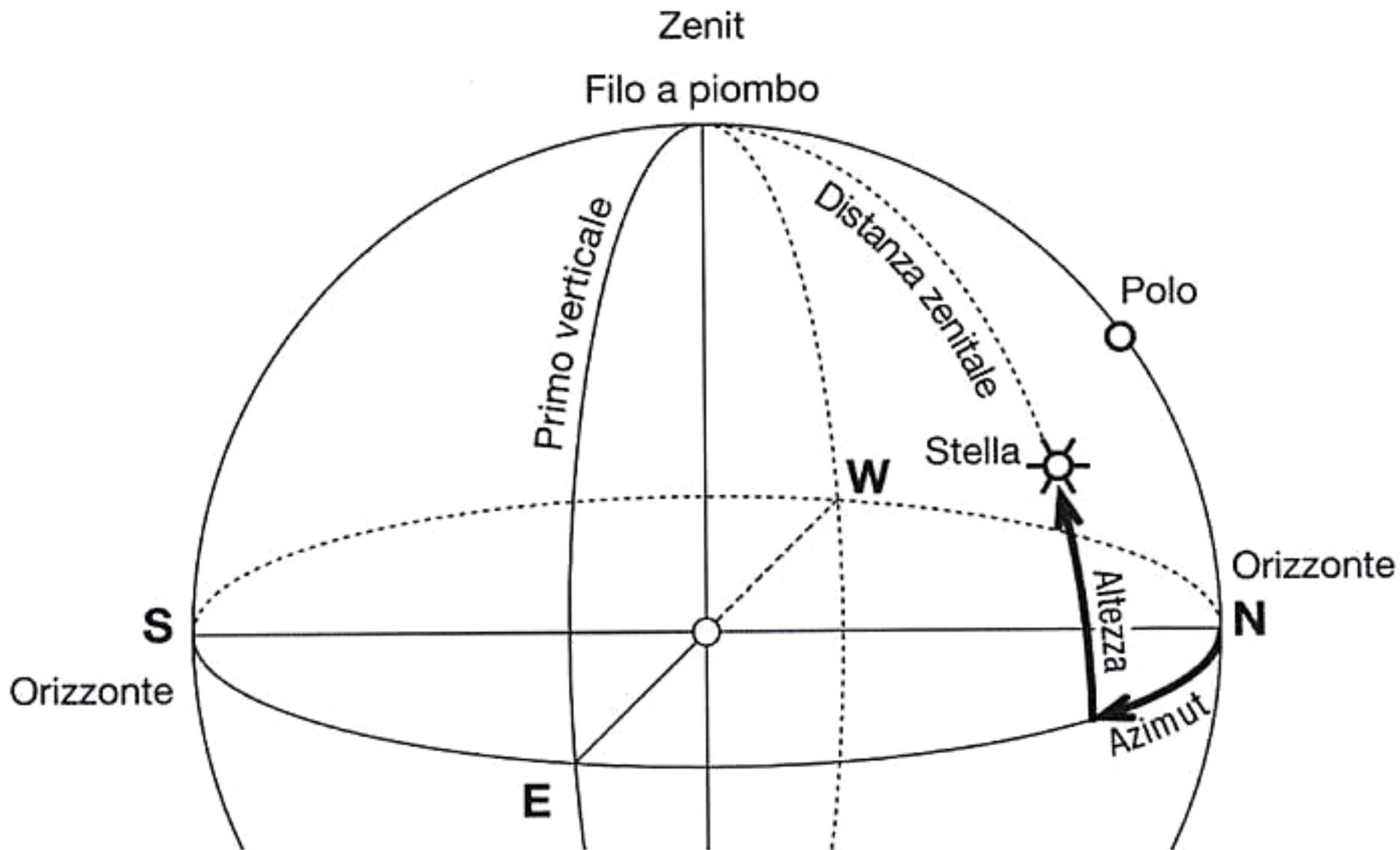
Orizzonte astronomico locale

Elemento
architettonico
da rilevare



Teodolite

Altezza e Azimut

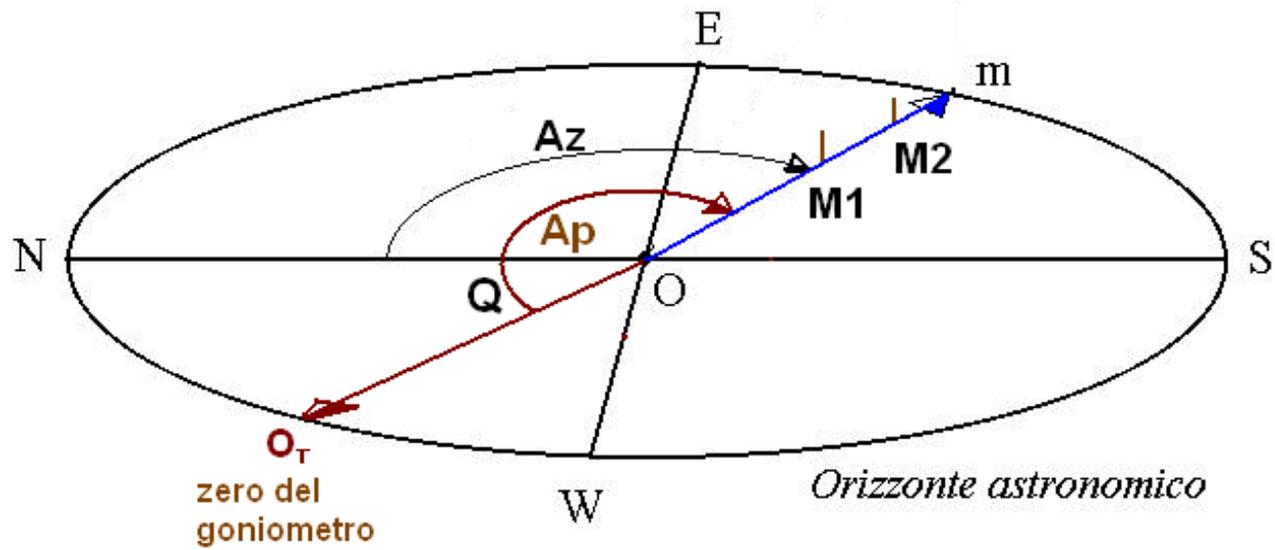


la Calibrazione

**Conversione degli angoli
orizzontali (misurati) in
azimut astronomici**

$$\text{Az(astro)} = \text{Angolo orizzontale} + C$$

C = correzione (offset)



Az = Azimut Astronomico (da determinare)
Ap = Angolo Orizzontale (misurato)

Calibrazione:

$$Az = Ap - Q$$

Calcolo dell'altezza angolare apparente dell'orizzonte naturale locale visibile da un certo luogo

Sia P1 il punto di stazione, posto a quota altimetrica q_1 e P2 il punto di collimazione posto a quota altimetrica q_2 , posti ad una distanza planimetrica d tra loro, l'altezza angolare apparente h_o corretta per la rifrazione e la curvatura terrestre è data da:

$$h_o = S - r$$

dove:

$$S = \arctan\left(\frac{q_2 - q_1}{d} \cdot \frac{d}{2R}\right)$$

e:

$$r = 0,58 \cdot e^{-(H/8400)} \cdot e^{(-S/3)}$$

$$H = \frac{q_2 + q_1}{2}$$

Il significato dei simboli utilizzati è il seguente:

S = altezza ($^\circ$) dell'orizzonte sul piano

r = angolo di rifrazione

H = altezza s.l.m. in metri

q_2 = quota altimetrica (slm) del punto di collimazione

q_1 = quota altimetrica (slm) del punto di stazione

d = distanza planimetrica tra il punto di stazione ed il punto di collimazione

h_o = altezza angolare corretta per la rifrazione

R = raggio medio di curvatura della Terra ($R=6370000$ metri)

La presente procedura è approssimata in quanto la Terra è supposta sferica e di raggio medio pari a 6370 Km. Per una migliore approssimazione può essere utilizzato il raggio locale R_o dell'ellissoide WGS84, variabile con la latitudine geografica del punto P1. La presente approssimazione è accurata entro una distanza $d < 300$ Km tra P1 e P2.

Quale strumento utilizzare per eseguire i rilievi?

a) Dipende dal sito archeologico da rilevare

a.1) Accessibilità

a.2) Complessità

a.3) Estensione

b) Che tipo di allineamenti devo misurare?

b.1) Allineamenti lunghi (resti di edifici)

b.2) Allineamenti corti (tombe)

b.3) Esatti

b.4) Simbolici

c) Quale precisione voglio raggiungere?

c.1) Usuale per l'Archeoastronomia (1°)

c.2) Elevata precisione (...datazione)

**Attenzione allo strumento che si utilizza per il rilievo
archeoastronomico del sito...**



Bussola Topografica $e(Az) = \pm 0^{\circ},25$



Squadro Cilindrico $e(Az) = \pm 0^{\circ},045$

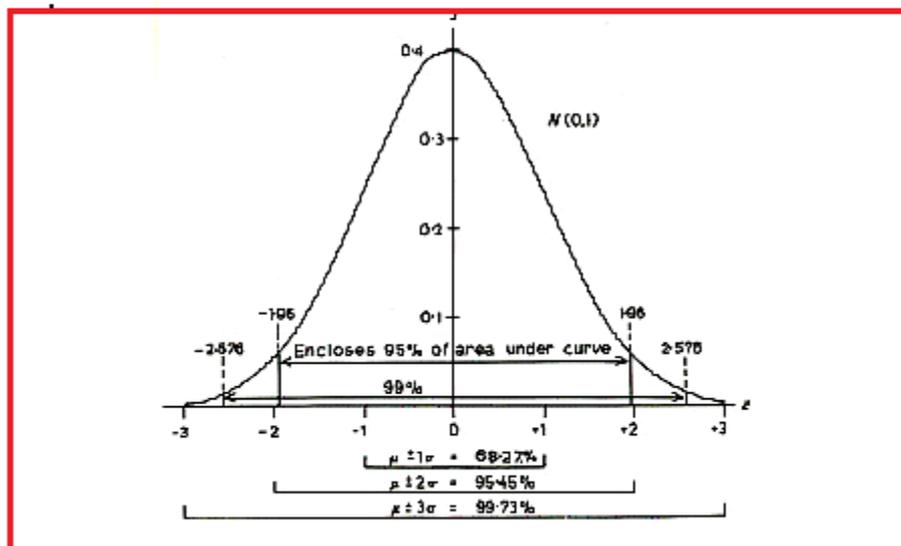


Teodolite $e(Az) = \pm 0^{\circ},005$

Quante misure eseguire?

Il maggior numero possibile (in teoria)

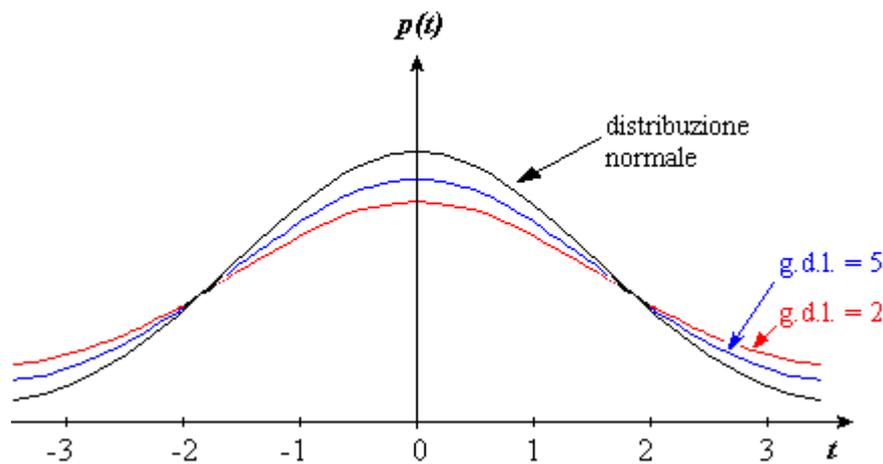
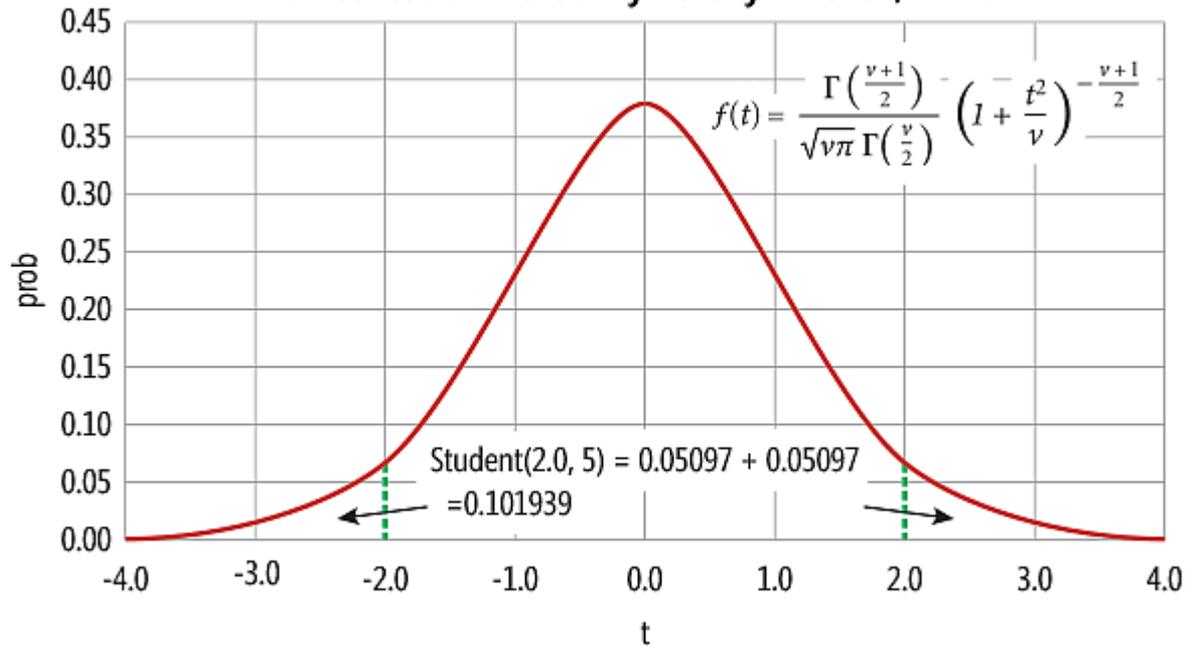
N=30 per rispettare il Teorema del Limite Centrale
distribuzione di probabilità Gaussiana



in pratica bastano **12** misure (indipendenti)

N<12: distribuzione t-Student

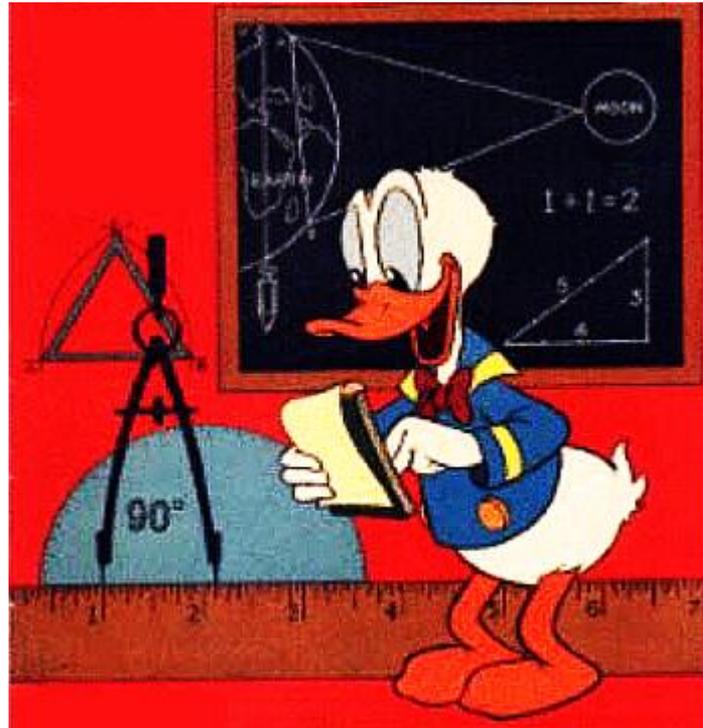
t-Distribution Probability Density Function, df = 5

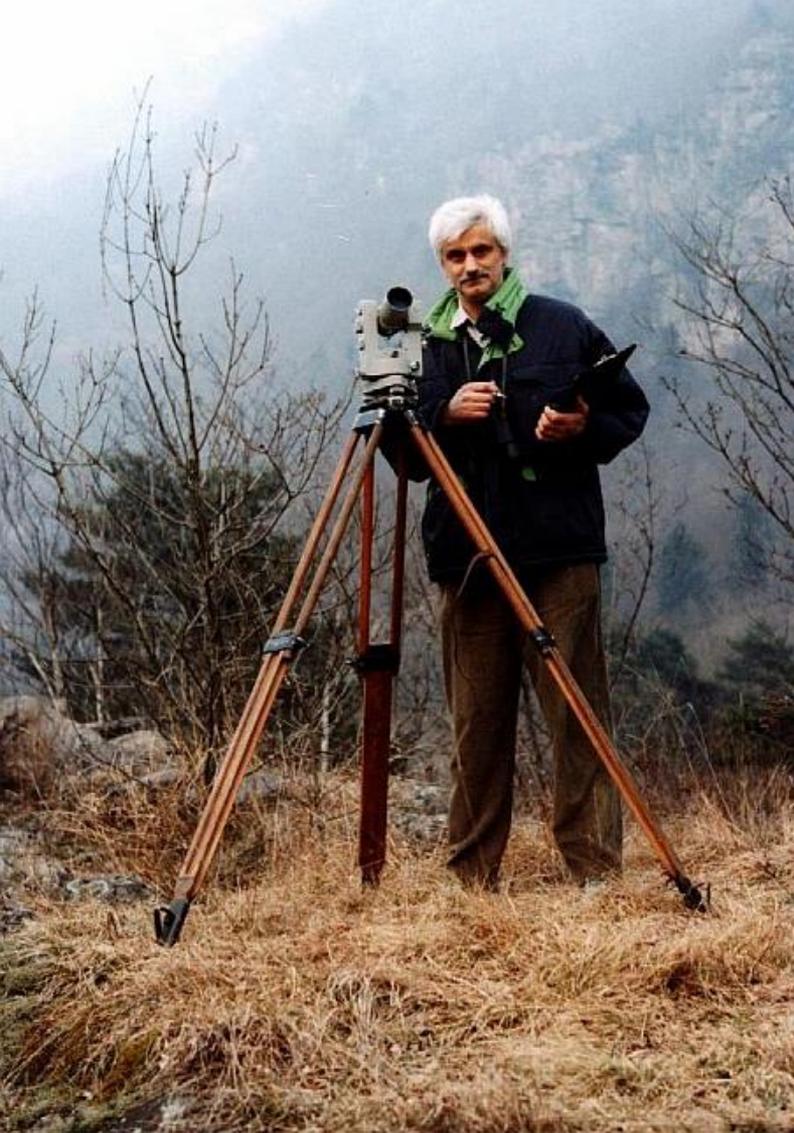


Confronto tra la distribuzione Normale e t-Student

Il Rilievo Archeoastronomico

Strumenti per il Rilievo Archeoastronomico

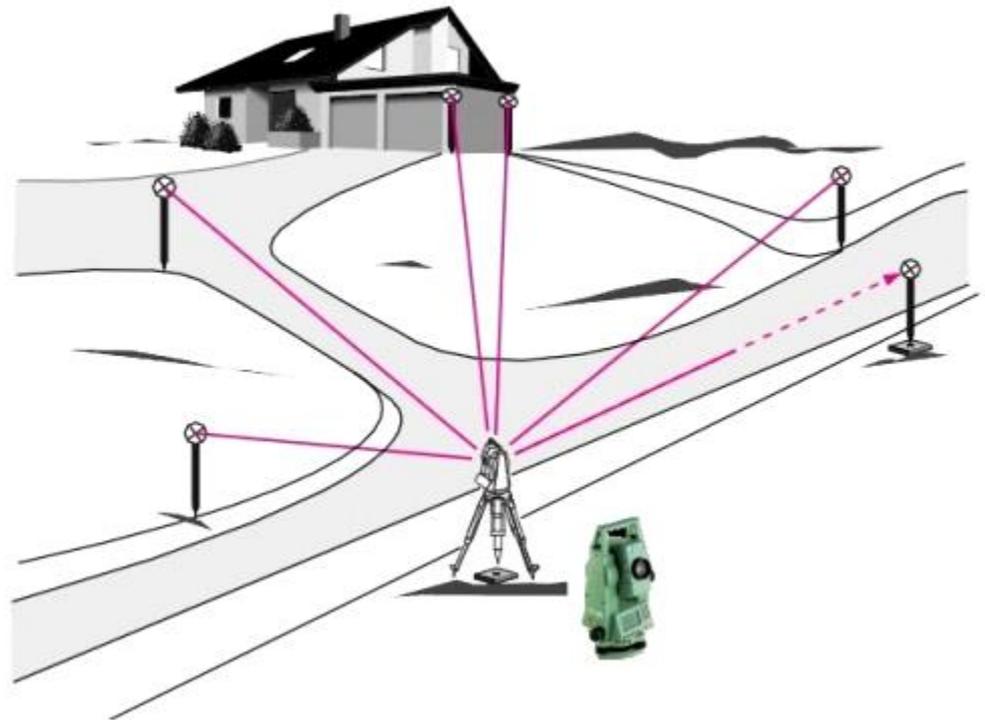




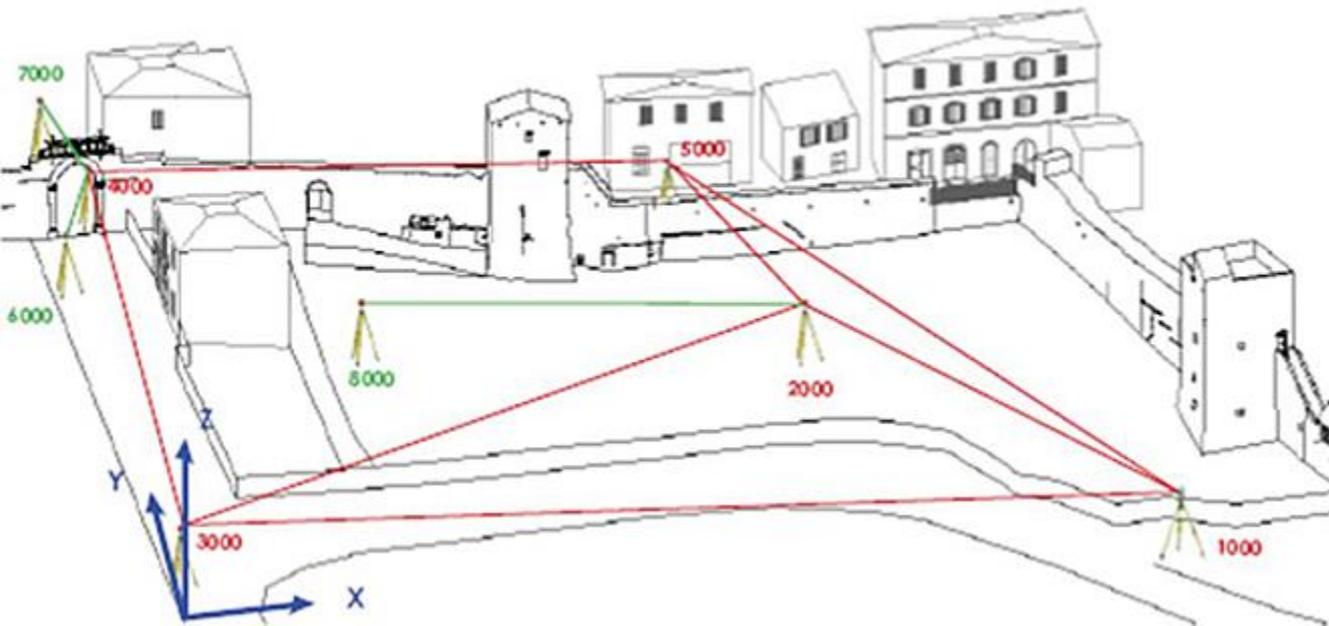
**Teodolite astronomico
Zeiss Theo 10**

Stazione Totale

Precisione Angolare: 5" - 2"
Portata Distanzionetrica: 250 m senza prisma
3000 m con prisma



Laser Scanner



Laser scanning



Teodolite Giroscopico



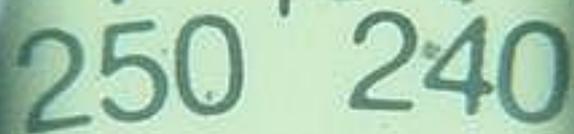
Squadro Cilindrico Graduato Salmoiraghi



Squadro Cilindrico Graduato Salmoiraghi



Bussola topografica
Wilkie mod. 9610



250 240

The image shows a close-up of a topographic compass scale. The scale is marked with degrees, with '250' and '240' clearly visible. The scale is part of a larger instrument, likely a Wilkie mod. 9610 topographic compass, as indicated by the text in the top right corner. The scale is marked with vertical lines, and the numbers are printed in a bold, sans-serif font. The background is dark, and the scale is illuminated, making the markings and numbers stand out.



Bussola topografica
Wilkie mod. 9610



Durante il rilievo archeoastronomico di un sito archeologico eseguito utilizzando una bussola topografica di precisione (generalmente di tipo prismatico ad armilla mobile) possono essere applicate due possibili modalità operative. La prima prevede l'utilizzo della bussola tenuta direttamente in mano durante le collimazioni, mentre la seconda prevede l'utilizzo di uno stativo (non ferromagnetico) che sostiene la bussola. In questo caso si raggiunge una maggior precisione di misura. Generalmente l'armilla della bussola possiede una divisione in unità angolari (1° oppure $0,5$ o altro) detta "granularità" e indicata con "g". A seconda della granularità della bussola e della modalità operativa adottata durante il rilievo archeoastronomico si possono raggiungere due differenti livelli di accuratezza.

In generale si avrà che l'errore $e(A_m)$ commesso su una singola misura di azimut magnetico sarà:

$$e(A_m) = \frac{1}{2} g$$

bussola tenuta in mano

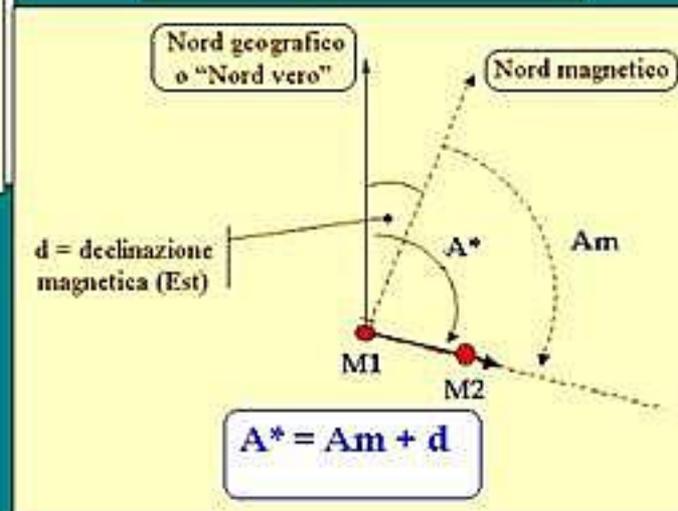
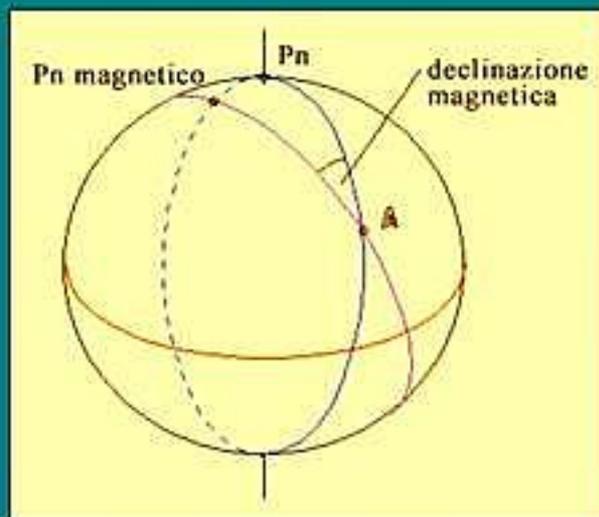
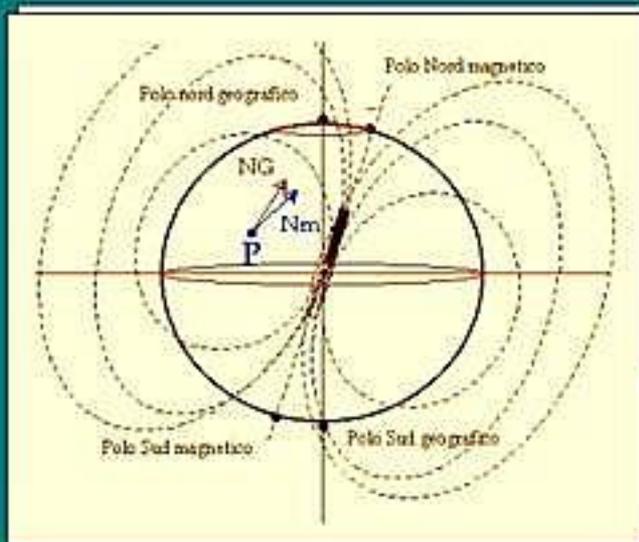
$$e(A_m) = \frac{1}{6} g$$

bussola montata su stativo

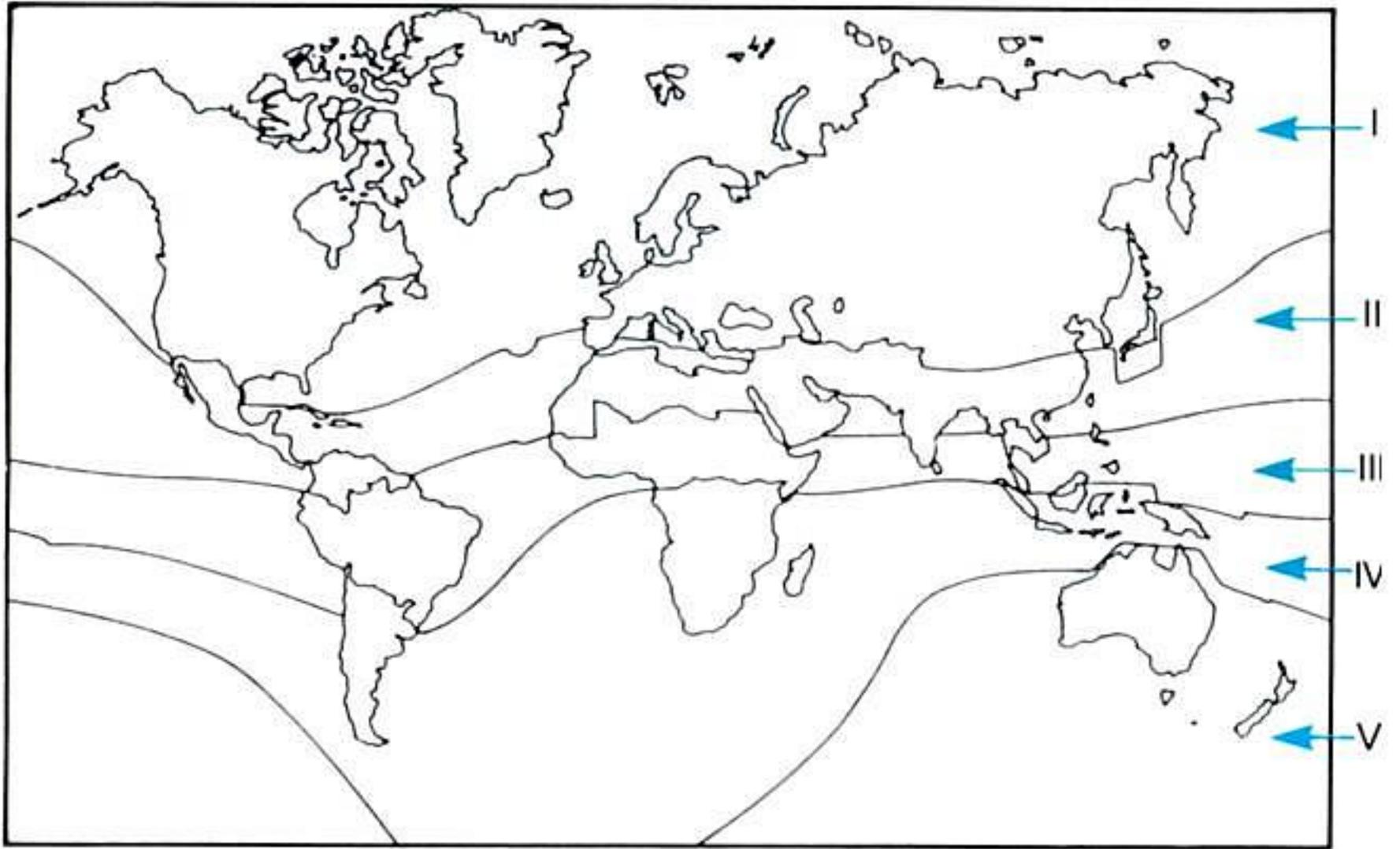
con: g = granularità = intervallo di divisione dell'armilla

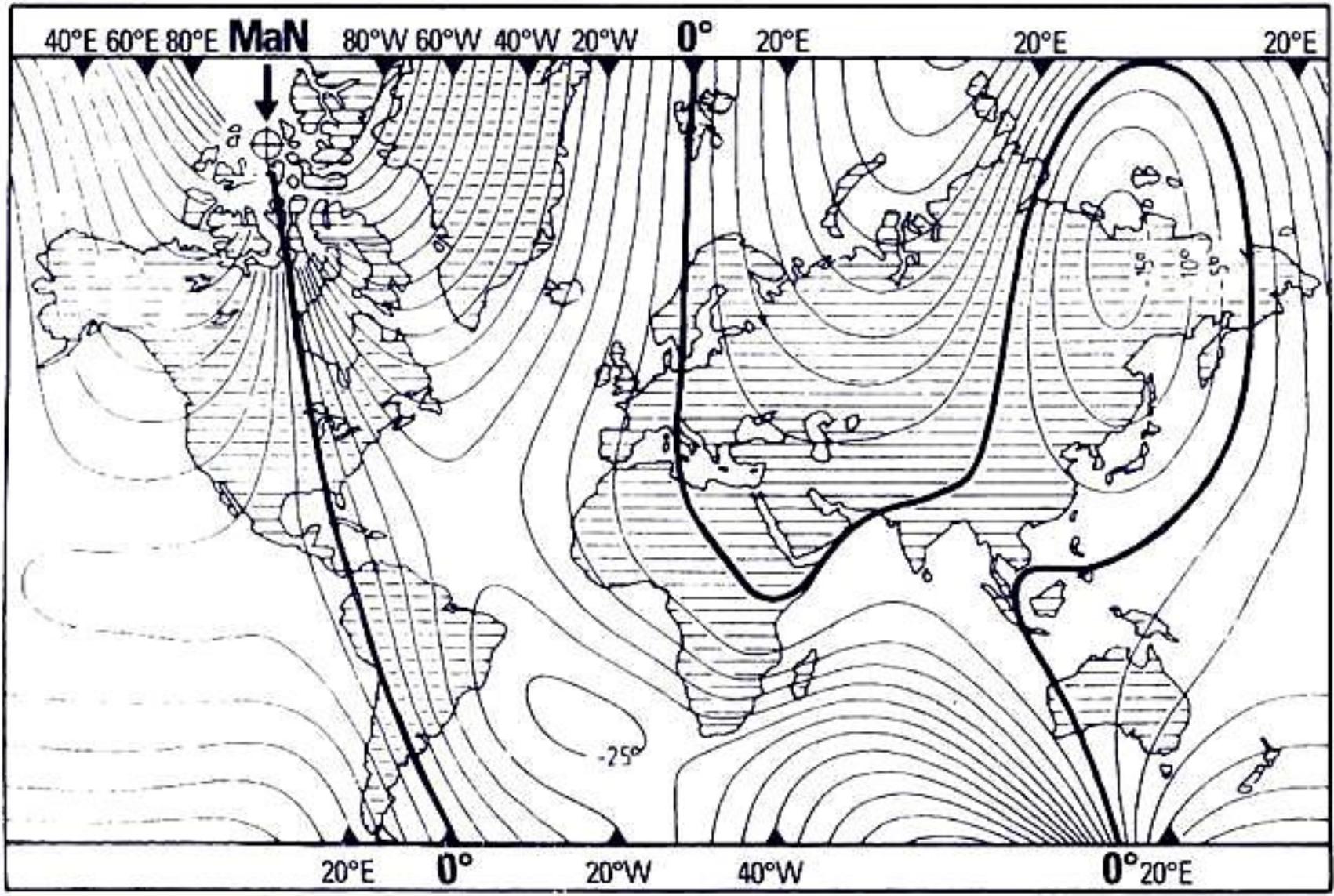


Bussola Topografica
Wilkie mod. 9610.



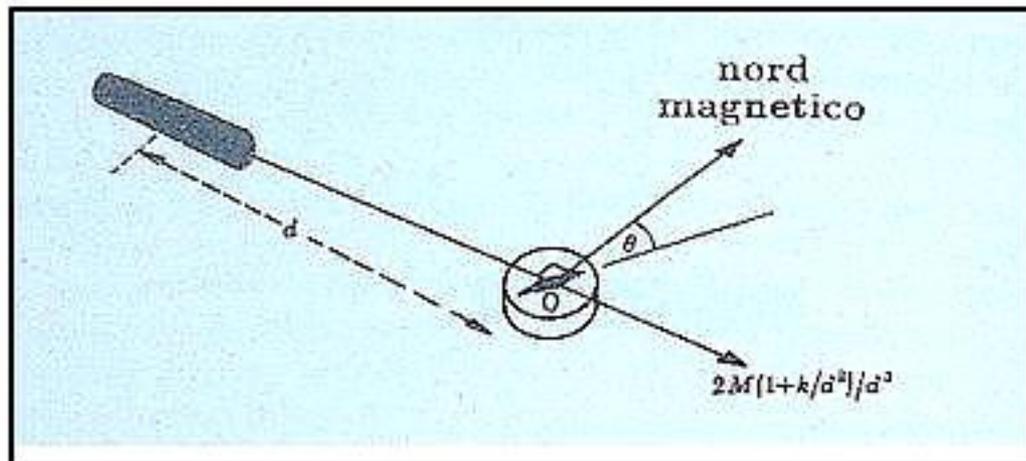
**Rilevamento dell'Azimut
Magnetico di una
direzione M1-M2**





Effetto perturbativo di una massa metallica

Durante la fase di rilievo dell'azimut magnetico di orientazione di una direzione archeoastronomicamente importante, la presenza nelle vicinanze di una massa metallica perturberà la bussola introducendo una rotazione spuria dell'armilla proporzionale al momento M magnetico della massa perturbante, dall'intensità H della componente orizzontale del campo magnetico terrestre e dalla distanza D a cui è posta la massa perturbante.



L'effetto della massa perturbante provocherà una rotazione θ dell'armilla della bussola e quindi l'azimut magnetico misurato sarà:

$$A_m = A_o + \theta$$

dove A_o è l'azimut magnetico misurato in assenza di perturbazioni.

La perturbazione θ sarà stimabile con (per k piccolo):

$$\theta = \text{atan} \left(\frac{2M}{H} \cdot \frac{1}{D^3} \right)$$

dove D è espresso in metri e θ è in gradi.

Da numerosi tests sperimentali è risultato che, con buona approssimazione, nel caso di automobili parcheggiate, staccionate metalliche etc. presenti nel sito da misurare si può porre:

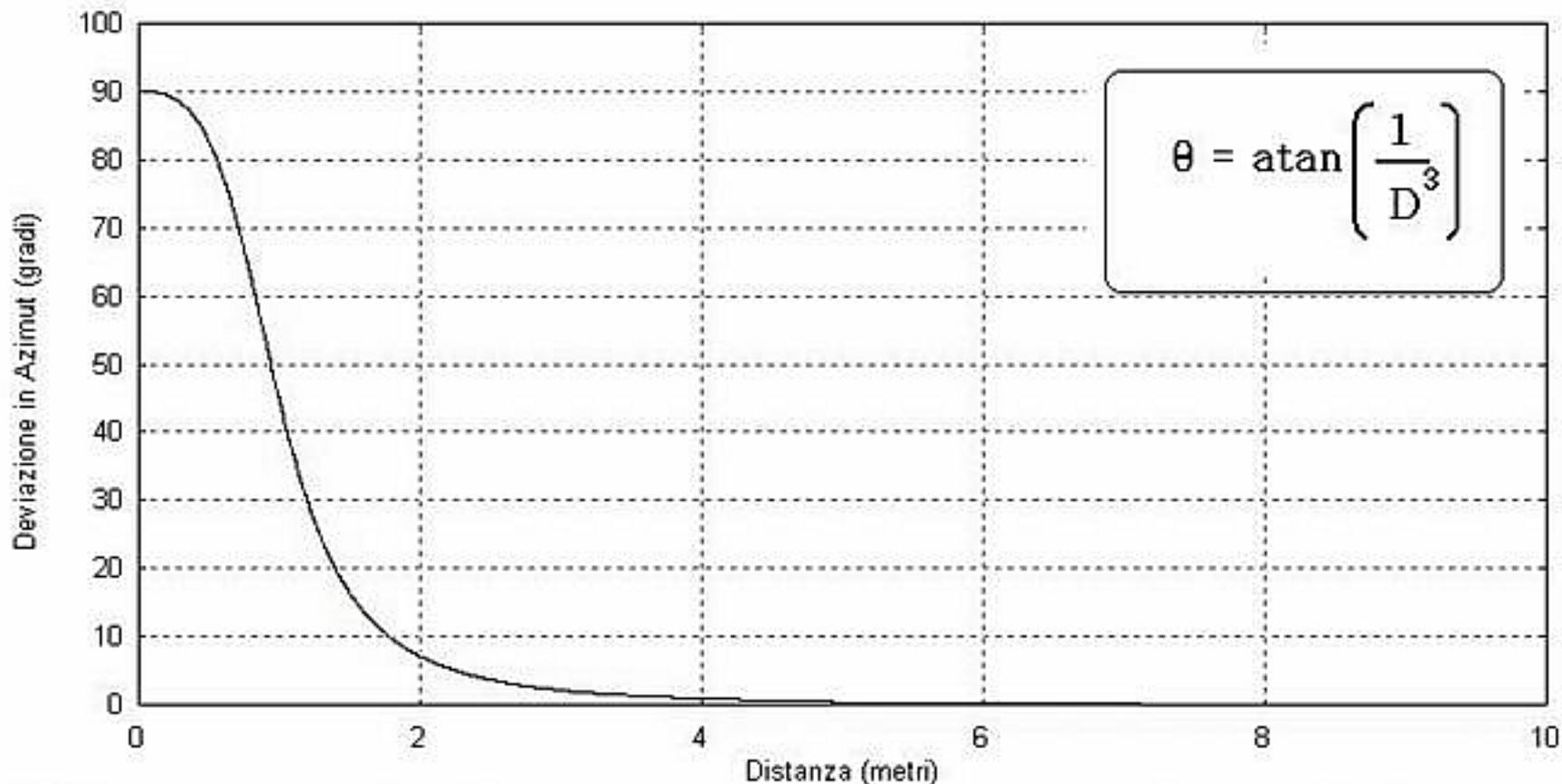
$$\frac{2M}{H} = 1$$

e quindi:

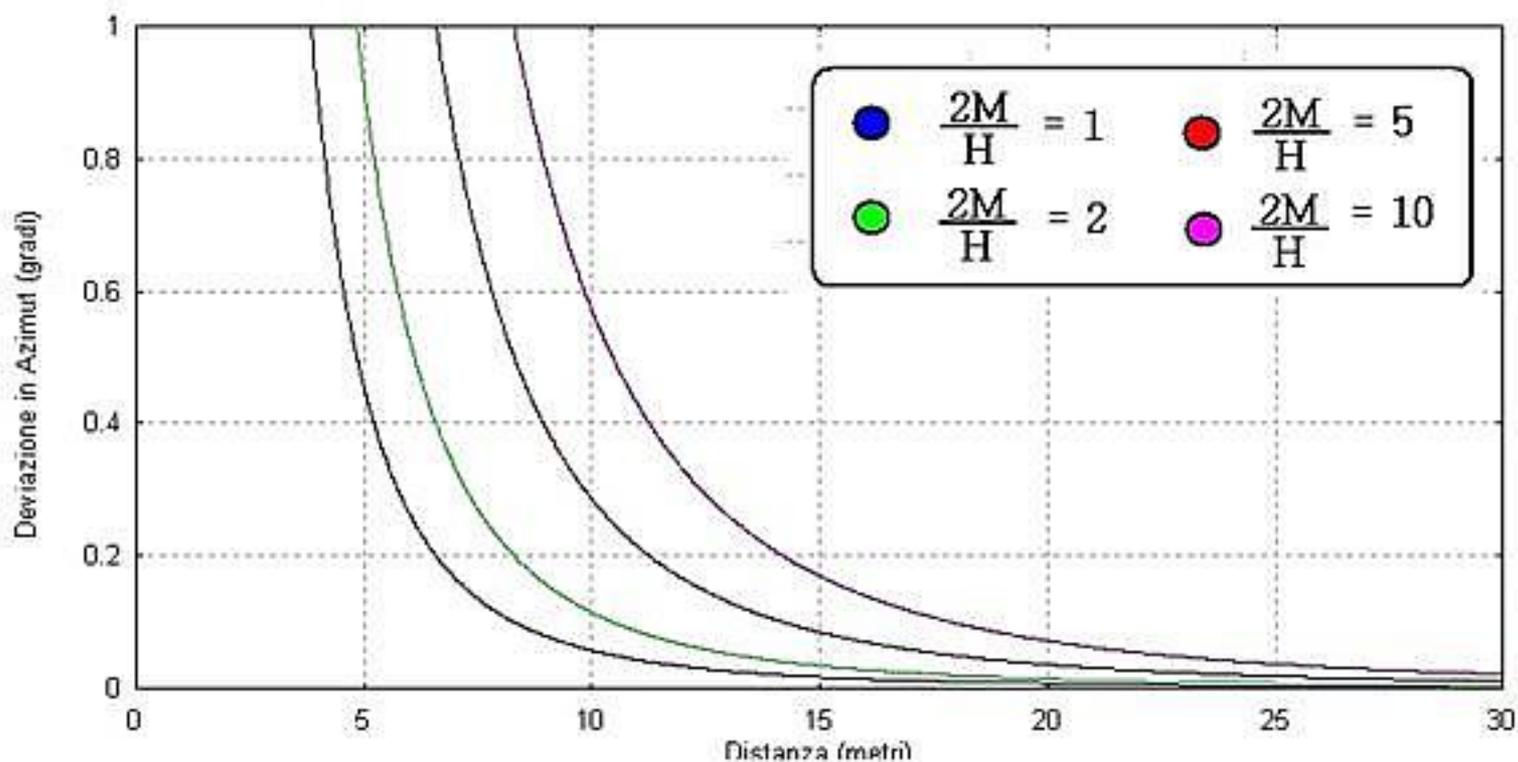
$$\theta = \text{atan} \left(\frac{1}{D^3} \right)$$

Questa relazione è utile per **STIMARE** l'entità della perturbazione magnetica e non per correggere gli azimut magnetici perturbati.

Effetto perturbativo di una massa metallica



Effetto perturbativo di una massa metallica posta a distanza D da una bussola che rileva l'azimut magnetico di una direzione, per $\frac{2M}{H} = 1$



Effetto perturbativo di una massa metallica posta a distanza D da una bussola che rileva l'azimut magnetico di una direzione, per vari valori di $\frac{2M}{H}$.

Per distanze relativamente elevate, da circa 5 metri in su, la seguente approssimazione è adeguata:

$$\theta = 57^{\circ},3 \cdot \frac{2M}{H} \cdot \frac{1}{D^3}$$

Perturbazione magnetica dovuta ad un conduttore in cui scorre corrente

Se nelle vicinanze di una bussola che misura l'azimut magnetico di orientazione di una direzione, esiste una linea elettrica di alta tensione (AT), si genera un campo magnetico dovuto al passaggio di corrente nel conduttore che perturberà la rotazione dell'armilla della bussola. L'azimut magnetico indicato della bussola sarà quindi erroneo.

Dati:

d = distanza euclidea della bussola dal conduttore, in metri.

V = tensione nel conduttore in Kilovolts (KV).

I = intensità della corrente che scorre nel conduttore, in Ampere (A).

Sarà possibile stimare l'intensità del H del campo magnetico presente ad una distanza euclidea " d " in metri dal conduttore, in mG (milligauss) con la seguente formula:

$$H = \frac{1}{d} \left[0,08 \cdot \left[\left[(d - 0,006 \cdot I) \cdot V - 653,5 \cdot (d - 0,05 \cdot I) \right] \right] \right]$$

La corrispondenza tra mG (milligauss) e nT (nanotesla) è la seguente:

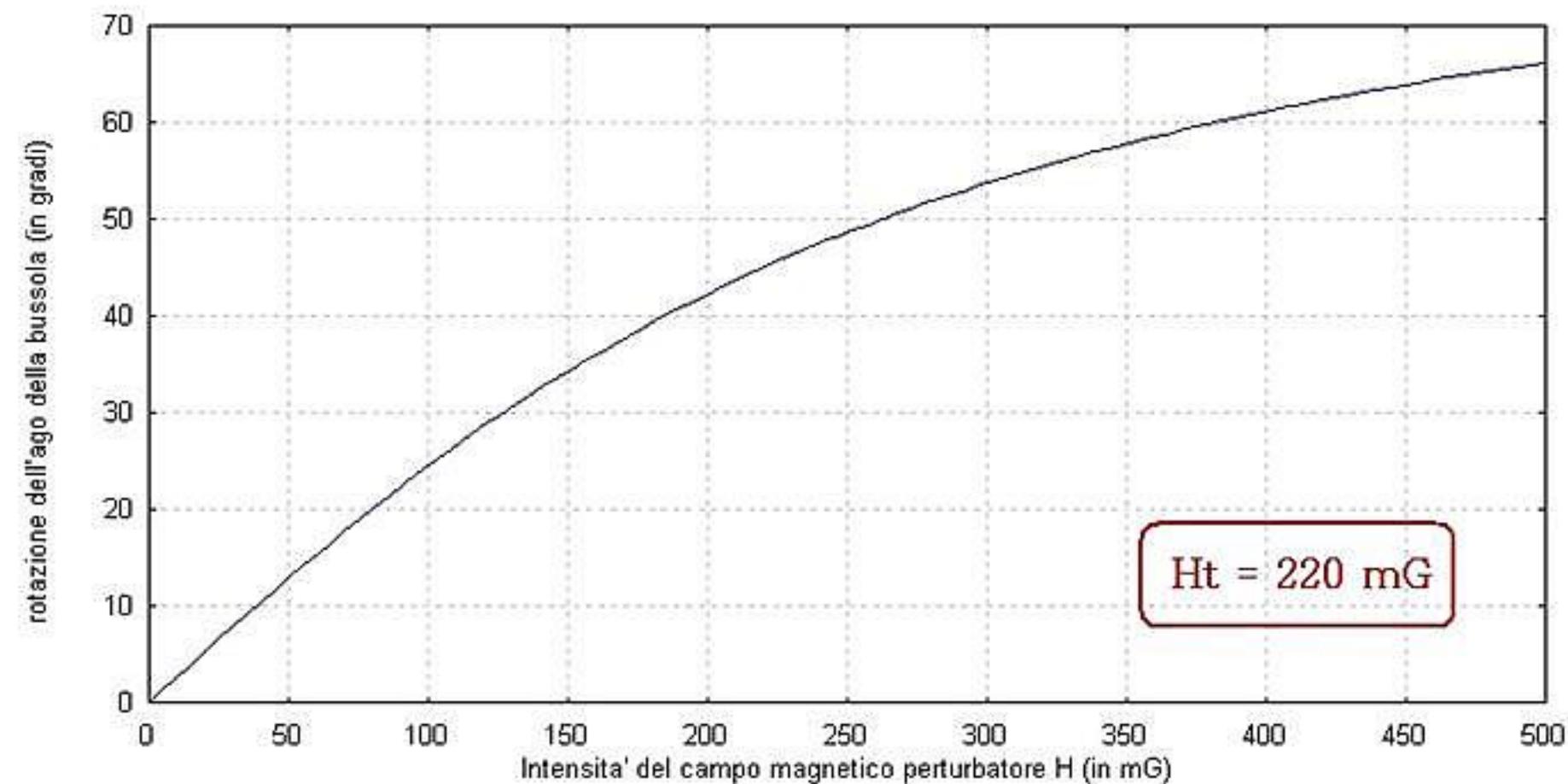
$$1 \text{ mG} = 100 \text{ nT}$$

L'angolo di rotazione dA dell'armilla della bussola in seguito all'interazione tra il campo magnetico terrestre H_t e quello generato dal conduttore H vale:

$$dA = \text{atan}(H/H_t)$$

Il valore della componente orizzontale H_t del campo magnetico terrestre varia da luogo a luogo e lentamente durante il tempo.

In Valbrenbana ed in Valcamonica mediamente si ha $H_t=22000$ nT pari a $H_t=220$ mG.



Calibrazione degli azimut magnetici mediante collimazione del Sole

Uno dei possibili metodi per calibrare gli azimut magnetici in modo da trasformarli nei corrispondenti astronomici è quello di eseguire la loro calibrazione utilizzando la misura dell'azimut magnetico del Sole ad un istante T e quello astronomico calcolato per lo stesso istante con le effemeridi.

Se $A_m(j)$ ($j=1, \dots, N$) sono gli N azimut magnetici misurati in un sito archeologico astronomicamente significativo i corrispondenti astronomici $A_z(j)$ possono essere calcolati mediante il seguente metodo di calibrazione:

$$A_z(j) = A_m(j) + D_s$$

per $j=1, \dots, N$

dove D_s è dato da:

$$D_s = A_0 - A_{m0}$$

in cui A_0 è l'azimut astronomico del Sole e A_{m0} il suo corrispondente magnetico misurato nell'istante T .

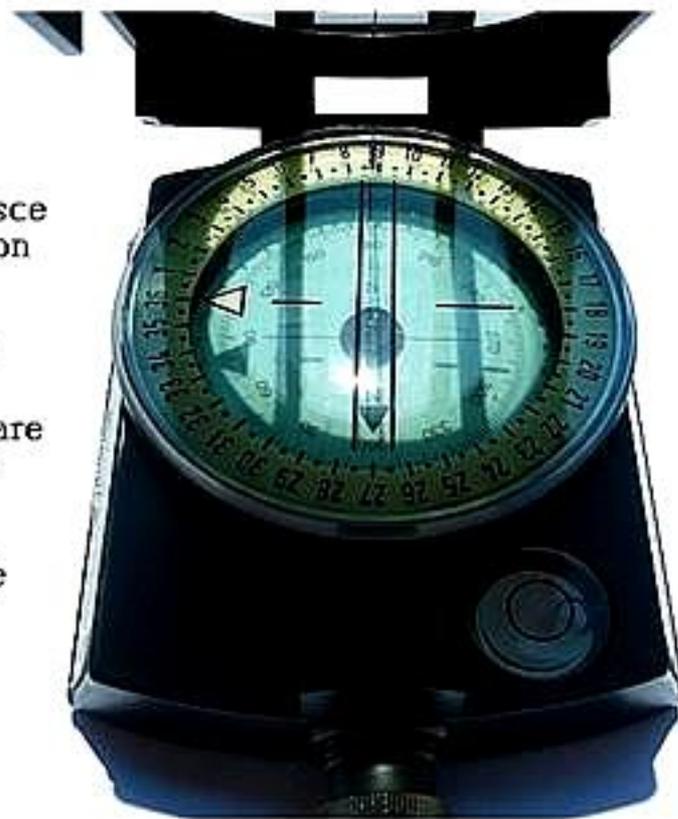


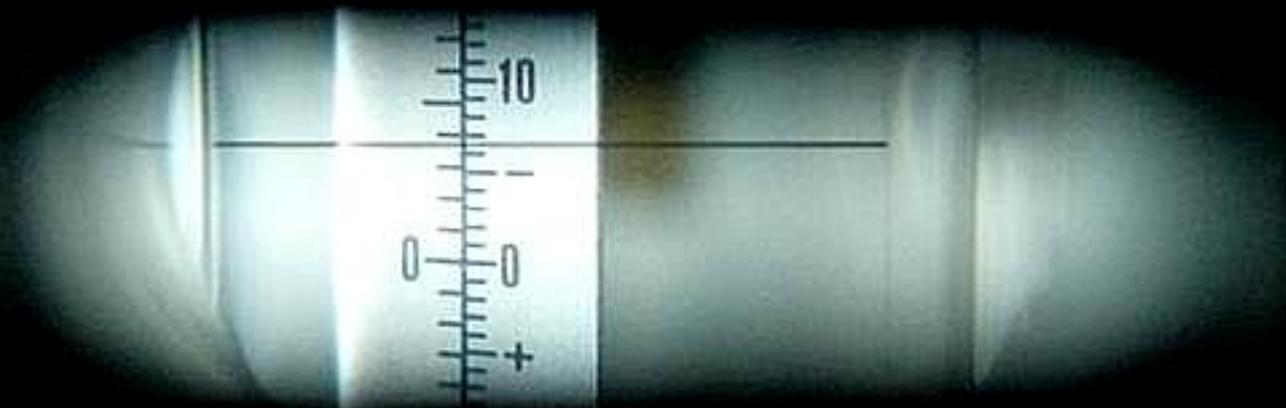
Si dispone la bussola con vetro che contiene il filo di collimazione approssimativamente ortogonalmente alla direzione di arrivo dei raggi solari in modo tale che l'ombra del filo proiettata sull'armilla della bussola, passi per il centro del pivot di sospensione. In questo modo la bussola collima virtualmente il centro del disco solare e quindi la lettura dell'azimut magnetico all'oculare o al prisma fornisce l'azimut magnetico del Sole all'istante T in cui viene eseguita la misura.

L'azimut magnetico A_m così misurato si riferisce all'istante T il quale deve essere conosciuto con rilevante accuratezza, diciamo 10 secondi.

Ora con il tempo T e i parametri orbitali della Terra si calcola con la Meccanica Celeste la effemeride del Sole per l'istante T , in particolare il suo azimut astronomico A_{m0} alla latitudine geografica a cui è posta la bussola (e anche l'osservatore). Le coordinate geografiche ed il tempo T sono fornite con sufficiente precisione da un ricevitore GPS.

Noti A_m e A_{m0} ora è possibile eseguire il calcolo della costante di calibrazione D_s da utilizzare per trasformare tutti gli azimut magnetici misurati nei siti nei corrispondenti astronomici.

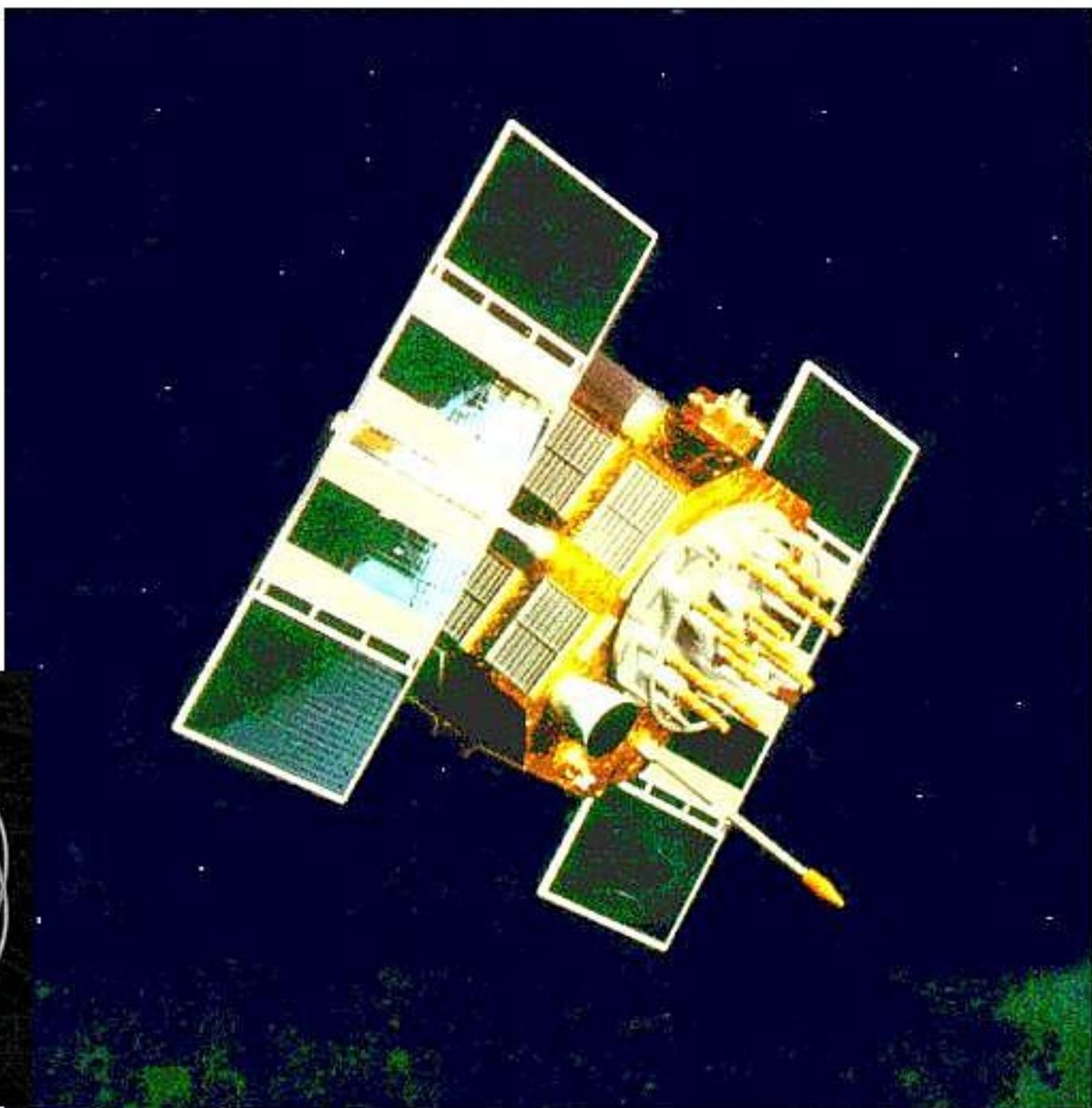


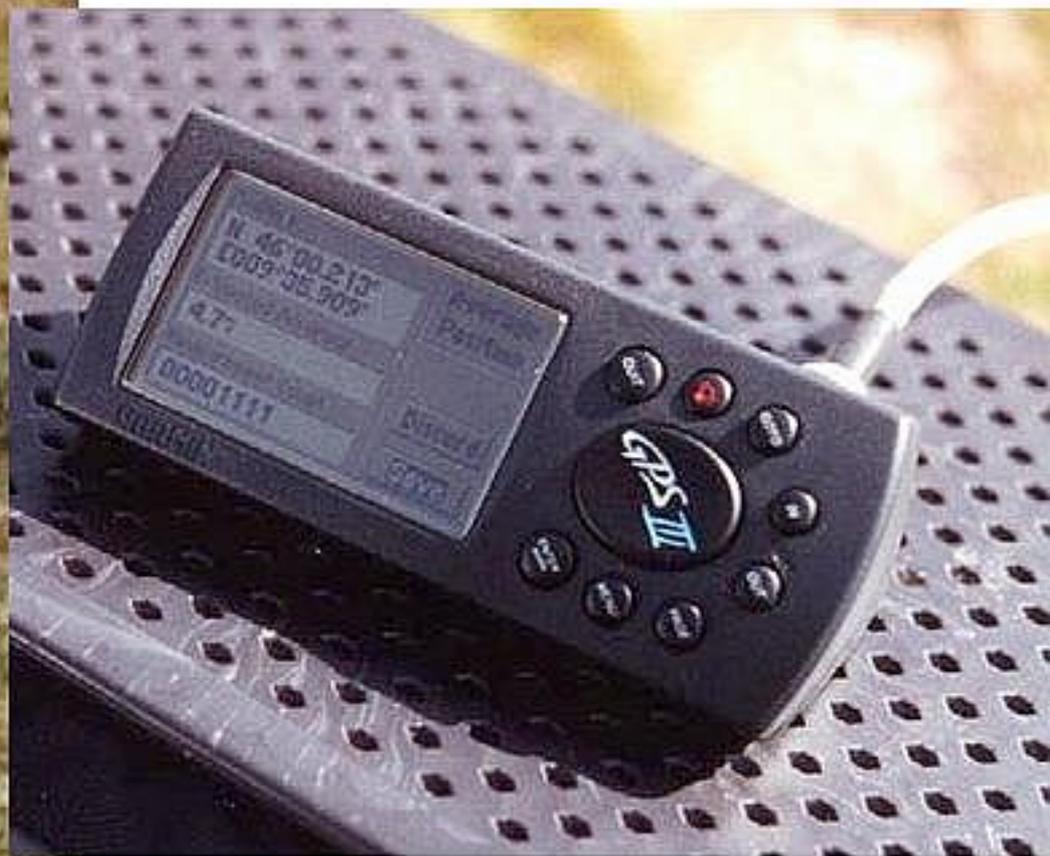


Clinometro SUUNTO Kr 360

Rilievi GPS

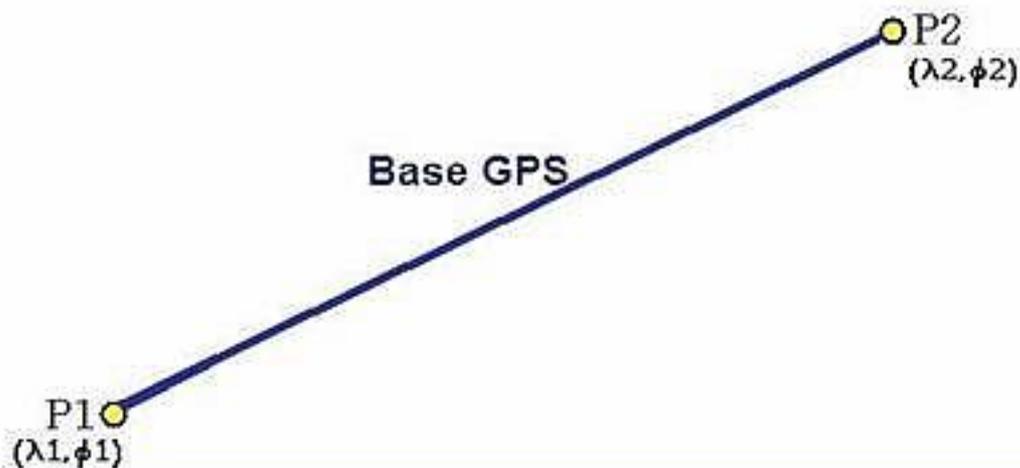
Satellite NAVSTAR



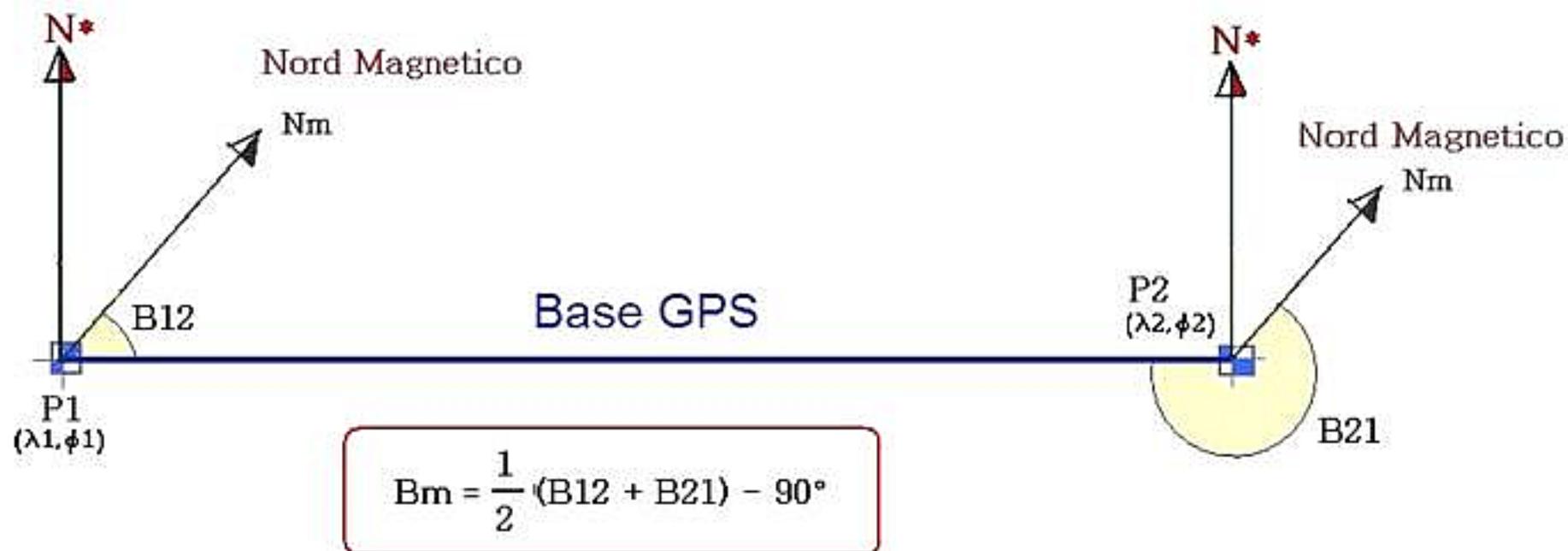


Procedura di rilievo archeoastronomico mediante Bussola Topografica di precisione e ricevitore GPS

- 1) Materializzazione della base GPS nel sito archeologico stabilendone i punti estremi e misurando le coordinate geografiche (oppure UTM) di esse riferite al datum WGS84.



2) Misura con la bussola, in andata ed in ritorno, dell'azimut magnetico di orientazione della base GPS facendo stazione alternativamente in un estremo e collimando l'altro e viceversa.



3) Misura dell'azimut magnetico di orientazione, con la bussola, di tutti gli allineamenti potenzialmente astronomicamente significativi presenti nel sito archeologico. Anche in questo caso in andata ed in ritorno.



$$A_m = \frac{1}{2} (A_{12} + A_{21}) - 90^\circ$$

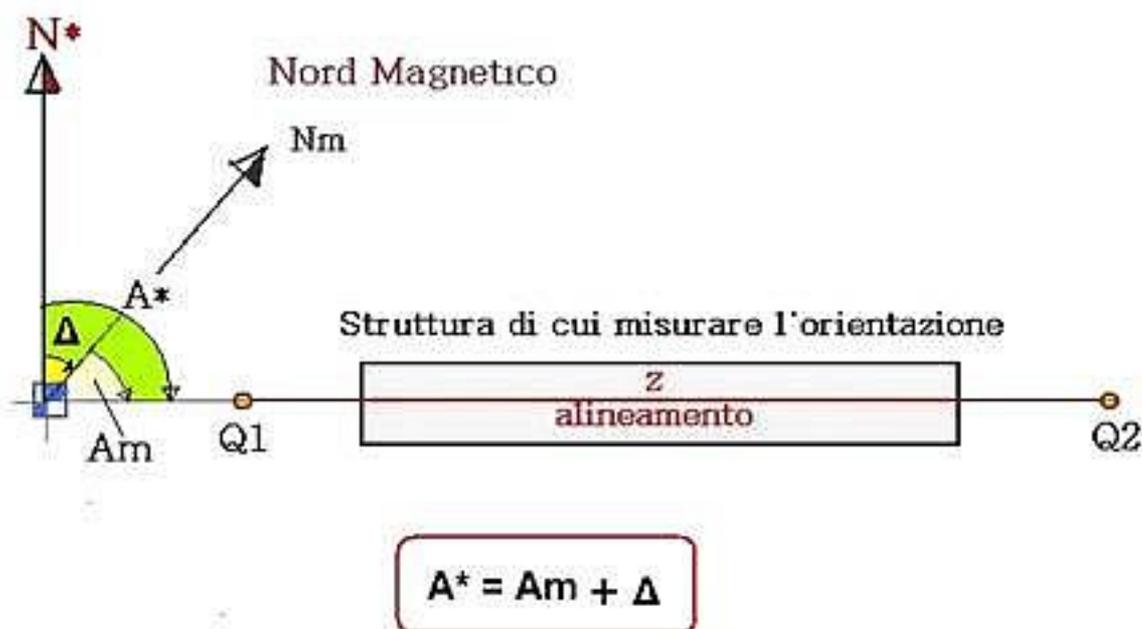
- 4) Calcolo della differenza tra l'azimut magnetico di orientazione della base GPS e quello geodetico calcolato utilizzando le coordinate geografiche dei suoi estremi.

$$B_{gps} = \text{atan} \left[\frac{(\lambda_2 - \lambda_1)}{(\phi_2 - \phi_1)} \cos(\phi_o) \right]$$

$$\phi_o = \frac{(\phi_2 + \phi_1)}{2}$$

$$\Delta = B_m - B_{gps}$$

- 5) Calibrazione degli allineamenti rilevati nel sito, sommando ai rispettivi azimut magnetici la differenza calcolata al punto 4) ottenendo il corrispondente azimut geodetico (astronomico) di ciascuno degli allineamenti misurati.

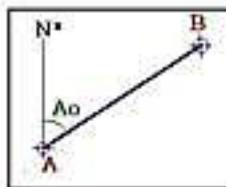


Azimut di una base GPS con misure di codice C/A

Sia AB una base GPS di azimut astronomico pari ad A_0 e lunghezza D , essa può essere materializzata misurando le coordinate dei due estremi A e B, riferite al datum WGS84 mediante un ricevitore GPS operante con misure di codice C/A trasmesso sulla sola frequenza L1 (1575,42 MHz).

Quantità misurate:

Punto	Latitudine (gradi)	Longitudine (gradi)	Numero di fixes
A	φ_A	λ_A	N_A
B	φ_B	λ_B	N_B



Calcolo azimut geodetico della base:

$$A_0 = \arctan \left(\frac{\lambda_B - \lambda_A}{\varphi_B - \varphi_A} \cos(\varphi_0) \right) \quad (\text{gradi})$$

dove:

$$\varphi_0 = \frac{\varphi_B + \varphi_A}{2} \quad (\text{gradi})$$

L'incertezza con cui l'azimut geodetico A_0 è determinato vale:

$$\sigma = \frac{168 \text{ HDOP}}{D} \quad (\text{gradi})$$

e lo SDOM vale:

$$\text{SDOM} = \sigma / \sqrt{N_0} \quad (\text{gradi})$$

con:

$$N_0 = (N_A + N_B) / 2$$

I limiti di confidenza ($p=95\%$) relativi all'azimut geodetico della base saranno:

$$A_u = A_0 + 2 \sigma / \sqrt{N_0} \quad (\text{gradi})$$

$$A_d = A_0 - 2 \sigma / \sqrt{N_0} \quad (\text{gradi})$$

A questo punto l'azimut della base GPS sarà: $A_0 \pm \text{SDOM}$ e quindi si avrà:

$$A_d \leq A_0 \leq A_u$$

con un livello di probabilità pari al 95%.

Lunghezza di una base GPS con misure di codice C/A

La lunghezza di una base GPS che congiunge due punti A e B può essere misurata utilizzando le coordinate dei due punti estremi riferite al datum WGS84 utilizzando le sole misure di codice C/A trasmesso sulla sola frequenza L1 (1545,72 MHz) come segue:

$$D_0 = 111129 \sqrt{(\varphi_B - \varphi_A)^2 + (\lambda_B - \lambda_A)^2 \cos^2(\varphi_0)} \quad \text{metri}$$

dove:

$$\varphi_0 = \frac{\varphi_B + \varphi_A}{2}$$

L'incertezza $\sigma(D)$ sulla lunghezza D calcolata vale:

$$\sigma = 3 \sqrt{2} \text{ HDOP} \quad (\text{metri})$$

e lo SDOM sarà:

$$\text{SDOM} = \sigma / \sqrt{N_0} \quad (\text{metri})$$

dove:

$$N_0 = (N_A + N_B) / 2$$

I limiti di confidenza (95%) sulla distanza misurata sono:

$$\begin{aligned} D_u &= D_0 + 2 \sigma / \sqrt{N_0} \\ D_d &= D_0 - 2 \sigma / \sqrt{N_0} \end{aligned} \quad (\text{metri})$$

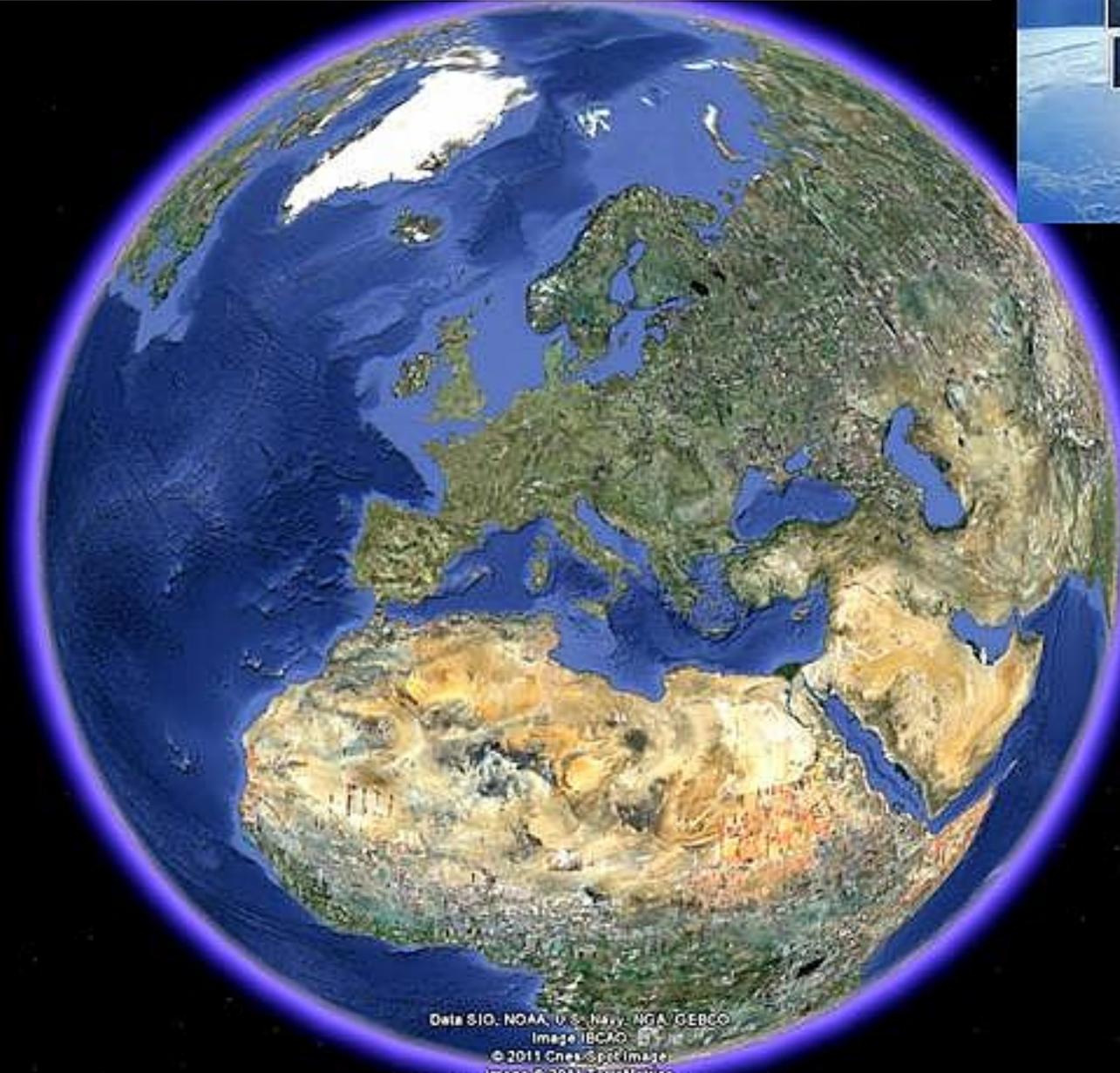
La lunghezza della base GPS sarà: $D_0 \pm \text{SDOM}$ e quindi si avrà:

$$D_d \leq D_0 \leq D_u$$

con un livello di probabilità pari al 95%.

Rilievo sulle immagini satellitari

Tecniche di telerilevamento



Data SIO, NOAA, U.S. Navy, NGA, GEBCO

Image IBCAO

© 2011 Cnes-Sp/Ima

Image © 2011 TerraMetrics

42°49'59.98"N 12°49'59.98"E elev. 107 m

©2010 Google

All 11001.10 km



GeoEye



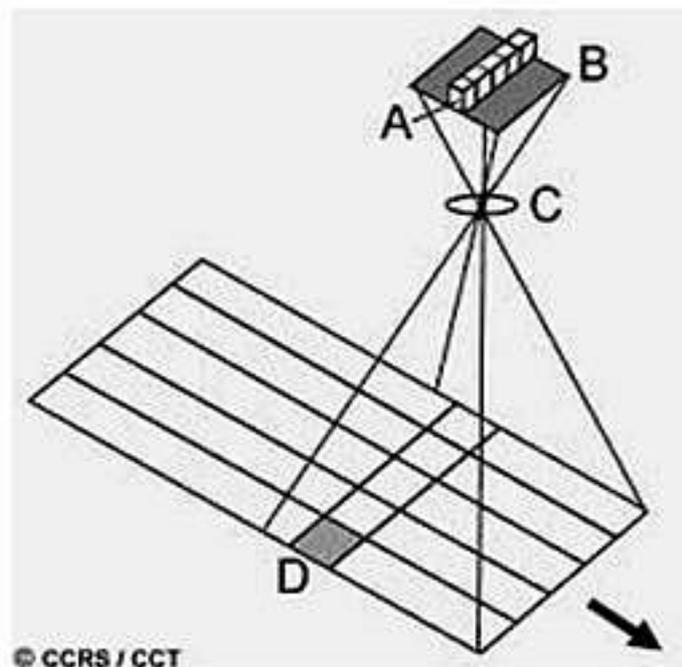
OrbView



QuickBird



Ikonos



Le fasi principali di un processo di Telerilevamento per l'Archeoastronomia



Misura on-line

Rilievo su Google Earth
(funzione righello)

Misura off-line

Rilievo sulle immagini (.jpg)
scaricate ed eventualmente
elaborate e migliorate

Misura off-line

- o) Misura angolare (Azimut) con la funzione "misurino" di GIMP
- o) Misura del Δe e Δn in pixels sull'immagine e calcolo dell'Azimut:

$$Az = \text{atan} \left[\frac{\Delta e}{\Delta n} \right]$$

**Misura dell'Azimut utilizzando
le coordinate geografiche dei
punti estremi P1 e P2
dell'allineamento .**

Azimut geodetico della direzione congiungente due punti di coordinate geografiche note

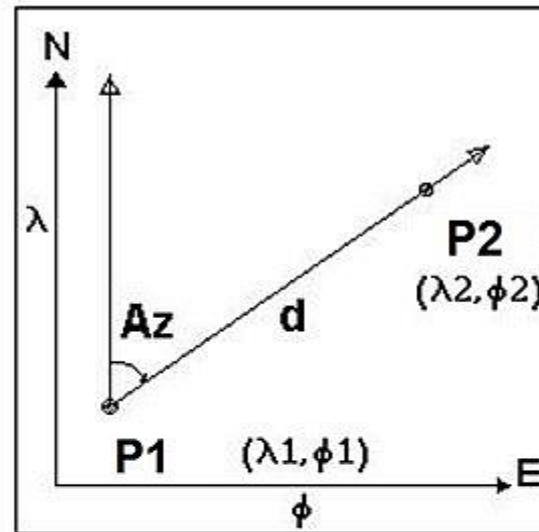
P1 estremi dell'allineamento
P2 da misurare

λ = Longitudine

ϕ = Latitudine

Az = Azimut geodetico

d = Distanza



Formula valida nel Campo Topografico ($d < 15$ km)

$$Az = \text{atan} \left[\frac{(\lambda_2 - \lambda_1)}{(\phi_2 - \phi_1)} \cos(\phi_1) \right]$$

Lunghezza dell'allineamento < 15 Km

Azimut geodetico della direzione congiungente due punti di coordinate geografiche note

Incertezza sulla valutazione dell'Azimut Geodetico

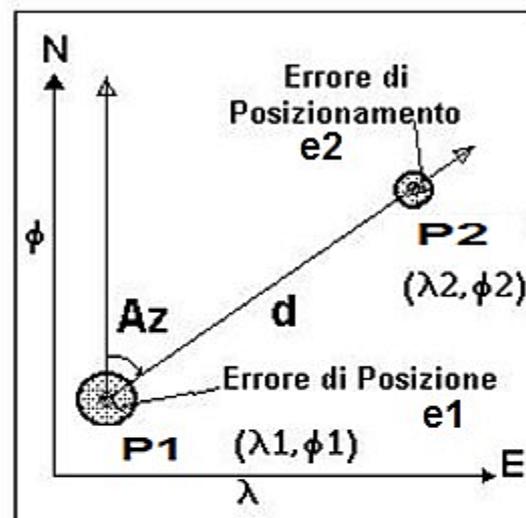
P1 estremi dell'allineamento
P2 da misurare

λ = Longitudine

ϕ = Latitudine

Az = Azimut geodetico

d = Distanza (m)



Incertezza sull'Azimut Geodetico

$$e(Az) \approx 57.3 (e_2 + e_1) / d$$

$$s = 0.0175 Re$$

$$Re \approx [6378.14 - 21.39 \sin^2(\phi_1)] \cdot 1000$$

$$d = \sqrt{(\lambda_2 - \lambda_1)^2 \cos^2(\phi_1) + (\phi_2 - \phi_1)^2} \cdot s$$



Una buona stima dell'errore $\varepsilon(Az)$ sull'azimut di orientazione della linea A->B, in gradi, dovuto all'operatore che esegue la misura può essere statisticamente ottenuta mediante la seguente relazione:

$$\varepsilon(Az) = \frac{360^\circ \cdot Q_{px}}{\pi \sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{X_{px}^2 + Y_{px}^2}} \cdot \frac{D}{d} \quad (\text{gradi})$$

in cui D è la lunghezza della diagonale dell'immagine e "d" è la lunghezza della linea di cui è stato misurato l'azimut geodetico di orientazione Az, Q_{px} è la dimensione in pixels del quadrato che forma l'immagine dei punti estremi della linea che si traccia sulla immagine, quindi l'incertezza sulla determinazione di ciascuno di tali punti, X_{px} e Y_{px} sono le dimensioni in pixels dell'immagine visualizzata sul monitor del computer. Le quantità D e "d" possono essere espresse in qualsiasi unità di misura, purché siano le stesse per le due lunghezze sulla stessa immagine.

Esempio:

$$\varepsilon(Az) = 0^{\circ},1 \frac{D}{d} \quad (\text{gradi})$$

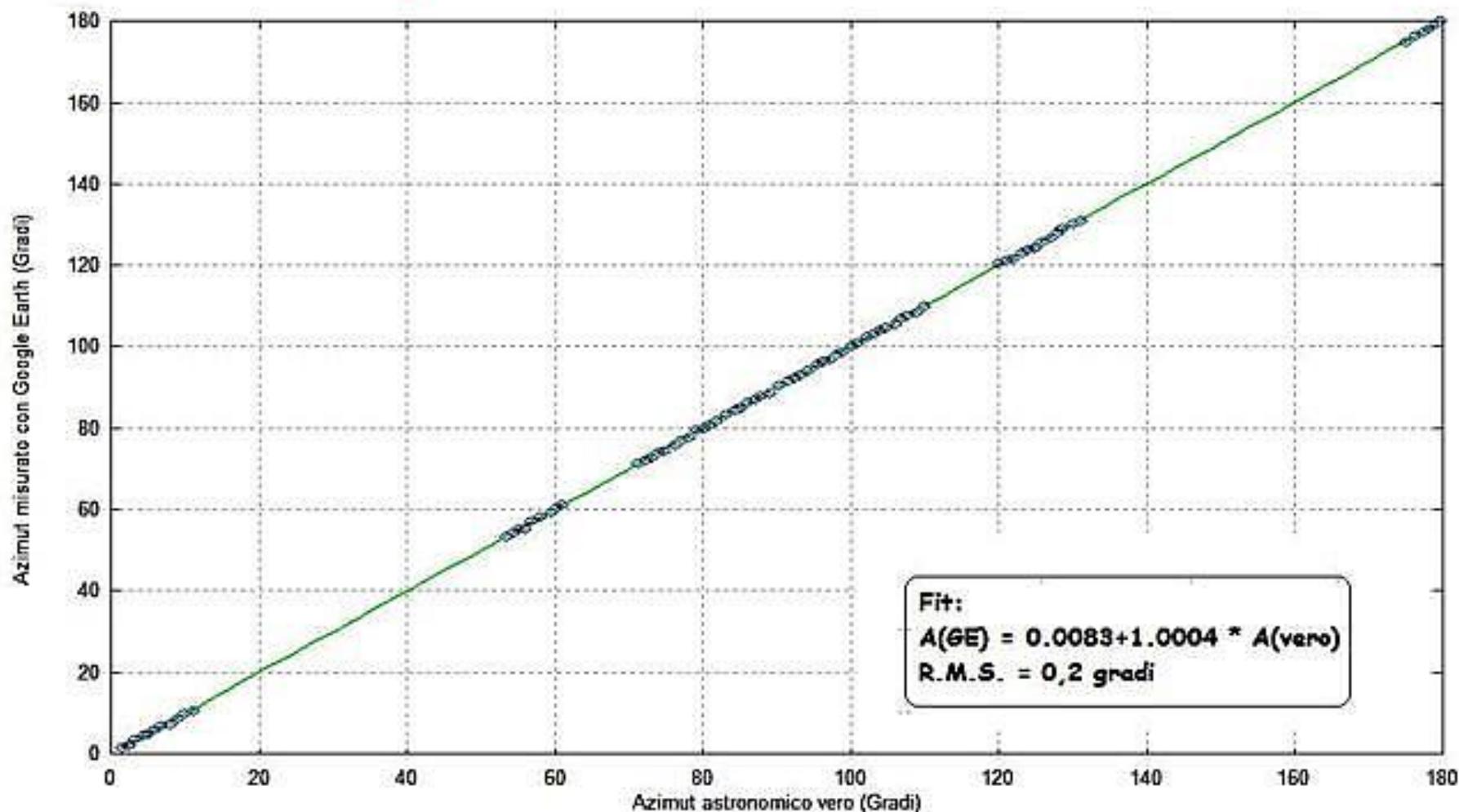
Esempio: Nella prima immagine si ha $Az=41^{\circ},83$ e $d=351,69$ metri, mentre nella seconda immagine si ha $D=575,57$ metri. Allora l'errore sull'azimut Az sarà dato da:

$$\varepsilon(Az) = 0^{\circ},1 \frac{575,57}{351,69} = \pm 0^{\circ},16 \text{ cioè } \pm 0^{\circ},2 \quad ; \text{ ergo: } Az=41^{\circ},8 \pm 0^{\circ},2$$

$B=0^{\circ},1$ è solo una stima statistica ma molto efficace

...ha un riscontro sperimentale

Verifica sperimentale dell'errore sull'Azimut



Confronto tra l'azimut astronomico misurato nei siti e quello rilevato sulle immagini di Google Earth con la funzione "righello"

Lo zoom dell'immagine

Dipendenza dall'ingrandimento dell'immagine

Il modello matematico per l'errore $\varepsilon(Az)$ di valutazione dell'azimut Az di un allineamento è il seguente:

$$\varepsilon(Az) = B(I, I_*) \frac{D}{d} \quad (\text{gradi})$$
$$B(I, I_*) = \frac{1}{10} \left[1 + \frac{3}{2} |\ln(I/I_*)| + \dots \right]$$

in cui D è la lunghezza della diagonale dell'immagine e " d " è la lunghezza della linea di cui è stato misurato l'azimut geodetico di orientazione Az mediante il "righello" di Google Earth. Le quantità D e " d " possono essere espresse in qualsiasi unità di misura, purché siano le stesse per le due lunghezze sulla stessa immagine.

I è l'ingrandimento attuale dell'immagine e I_* è quello ottimale dove (soggettivamente) la percezione della linea da approssimare con la funzione "righello" è la migliore possibile. Purtroppo il valore ottimale I_* è del tutto soggettivo in quanto dipende dalle effettive performances dell'operatore e dalla sua esperienza e varia da operatore ad operatore.

Una buona stima dell'errore $\varepsilon(Az)$ sull'azimut di orientazione della linea A->B, in gradi, dovuto all'operatore che esegue la misura può essere statisticamente ottenuta mediante la seguente relazione:

$$\varepsilon(Az) = \frac{1}{10} \frac{D}{d} \left(1 + \frac{3}{2} |\ln(I/I_*)| + \dots \right) \quad (\text{gradi})$$

in cui D è la lunghezza della diagonale dell'immagine e "d" è la lunghezza della linea di cui è stato misurato l'azimut geodetico di orientazione Az mediante il "righello" di Google Earth. Le quantità D e "d" possono essere espresse in qualsiasi unità di misura, purché siano le stesse per le due lunghezze sulla stessa immagine.

I è l'ingrandimento attuale dell'immagine e I_* è quello ottimale dove (soggettivamente) la percezione della linea da approssimare con la funzione "righello" è la migliore possibile. Purtroppo il valore ottimale I_* è del tutto soggettivo in quanto dipende dalle effettive performances dell'operatore e dalla sua esperienza e varia da operatore ad operatore. Tendenzialmente un operatore esperto utilizza un ingrandimento I molto vicino a I_* quindi il termine:

$$\frac{3}{2} |\ln(I/I_*)| + \dots$$

assume valori molto piccoli e può essere trascurato. In questo caso per stimare l'errore $\varepsilon(Az)$ sulla valutazione dell'azimut geodetico di orientazione della linea tracciata si può utilizzare con successo la relazione:

$$\varepsilon(Az) = 0,1 \frac{D}{d} \quad (\text{gradi})$$