Università della Terza Età "Cardinale Giovanni Colombo" – Milano

A. A. 2022 - 2023

Corso di Astrofisica

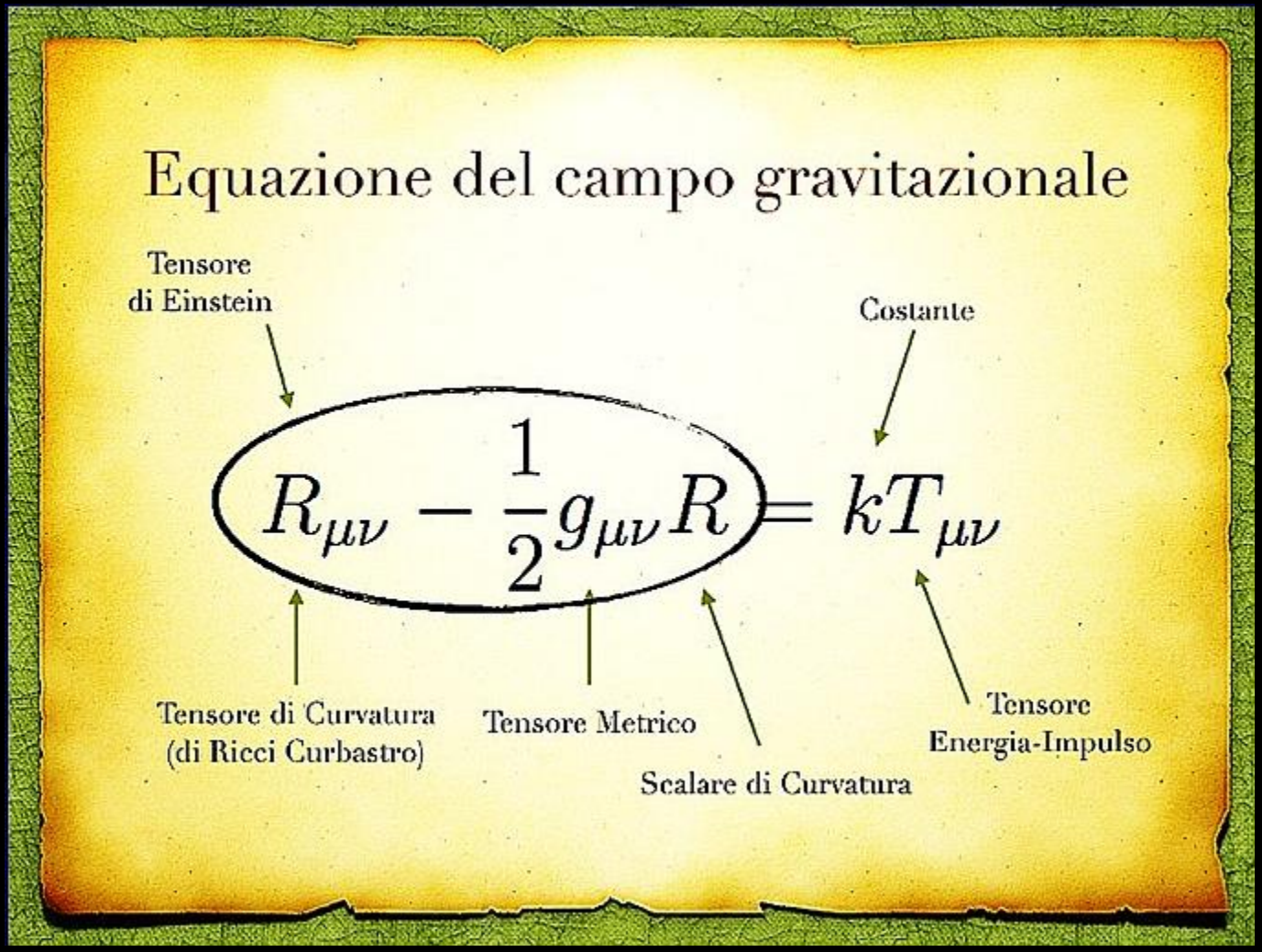
Docente:
Adriano Gaspani

La curvatura dello Spazio-Tempo: cause ed effetti

TEORIA DELLA GRAVITAZIONE

“La soluzione del problema della gravitazione non può essere la medesima nella fisica classica e nella teoria della relatività generale”

Equazione del Campo Gravitazionale di Einstein



Una teoria geometrica

Gli effetti gravitazionali sono dovuti alla curvatura

Il moto di un corpo in presenza di gravità è un moto libero in uno spazio curvo

Curvatura e gravitazione

E' quindi la materia, attraverso il campo gravitazionale, a determinare le proprietà geometriche dello spazio e del tempo

Spazio, tempo e materia

Lo spazio e il tempo non possono esistere senza materia

Spazio, tempo e materia formano un tutt'uno inscindibile

Se si toglie la materia, non resta lo spazio vuoto: non resta nulla

Curvatura e gravitazione

Secondo Einstein, la gravità non è una forza diretta tra corpi

Il campo gravitazionale curva lo spazio, la curvatura dello spazio determina il moto dei corpi in presenza di gravità

La soluzione di Schwarzschild

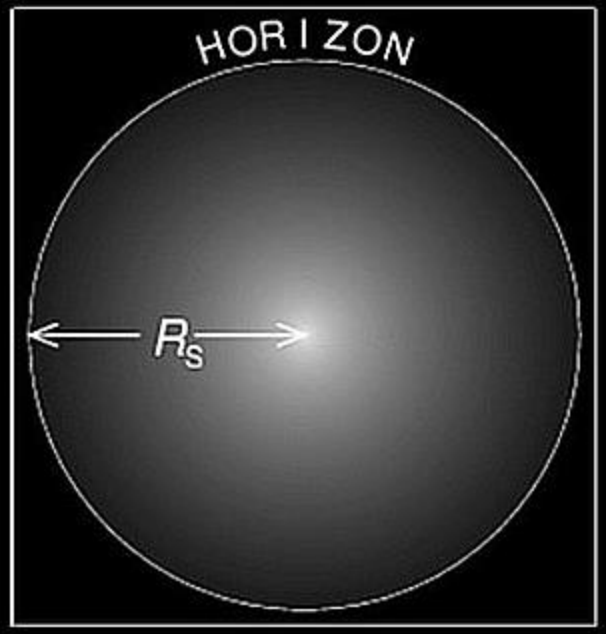
Nel 1916 l'astrofisico Karl Schwarzschild trova per primo una soluzione alle equazioni della relatività di Einstein per un oggetto sferico, statico e immerso in uno spazio vuoto. Se l'oggetto è concentrato entro un raggio critico, allora nulla, neanche la luce, può più uscirne.

rl Schwarzschild (1873-1916)

Raggio di Schwarzschild

$$R_s = \frac{2GM}{c^2}$$

$$R_s\,(km) \approx 3 \times \frac{M_{stella}}{M_{Sole}}$$



Nel 1967, Wheeler li battezza buchi neri

Curvatura e gravitazione

Maggiore è il campo gravitazionale e maggiore è la curvatura.

Si, ma c'è un limite...

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \operatorname{sen}^2\theta \end{pmatrix}$$

tensore metrico

Raggio di Schwartzschild

$$r_s = \frac{2GM}{c^2}$$

r_s = raggio

G = costante di gravitazione universale

M = massa

c = velocità della luce

Curvatura e gravitazione

Qualche dato interessante:

costante di gravitazione universale $G = 6.67259 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{m^3}{kg \cdot s^2}$

massa del Sole $mS := 1.989 \cdot 10^{30}\ kg$

massa della Terra $mT := 5.9726 \cdot 10^{24}\ kg$

$$\text{Raggio Schw. Terra} = \frac{2 \cdot G \cdot mT}{c^2} = 8.868 \cdot mm$$

$$\text{Raggio Schw. Sole} = \frac{2 \cdot G \cdot mS}{c^2} = 2.953 \cdot km$$

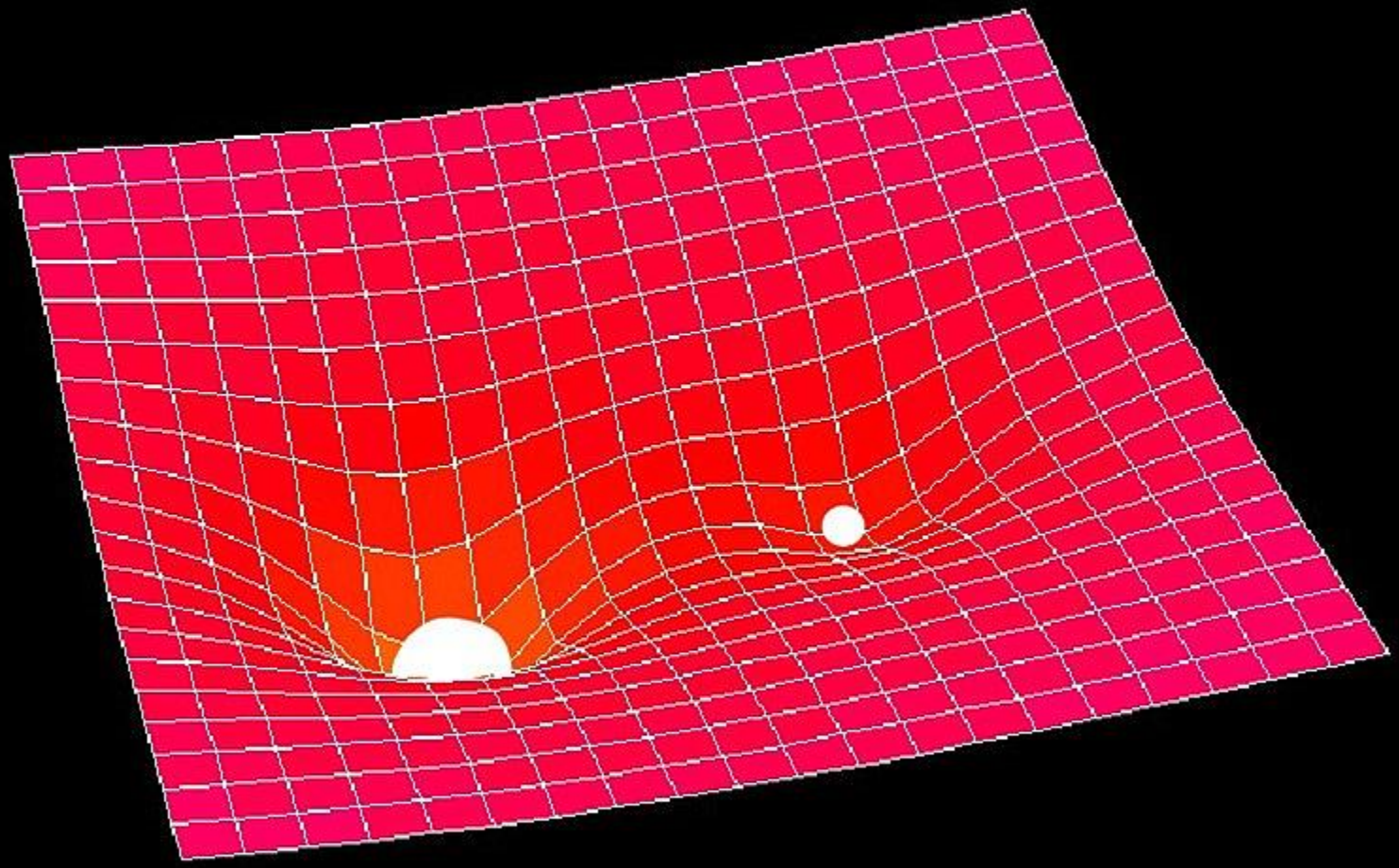
CUORE DELLA TEORIA

Due idee fondamentali:

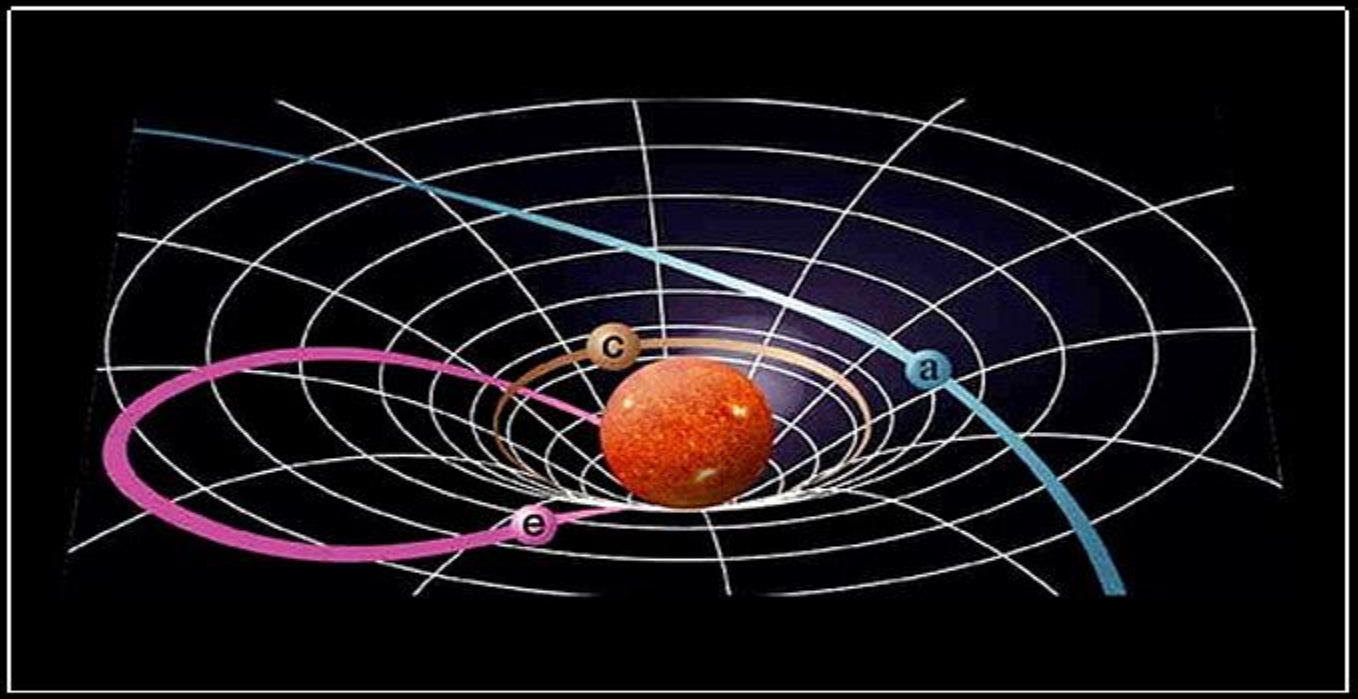
1) Non esiste la forza di gravità, ma le masse deformano, incurvandolo, lo spazio-tempo.

2) I corpi che abitualmente pensiamo come soggetti alla forza di gravità devono essere considerati come particelle libere di muoversi nello spazio-tempo,seguendo le sue geodetiche(= traiettoria più breve possibile)

LO SPAZIO-TEMPO



LO SPAZIO-TEMPO



La materia dice allo spazio-tempo come curvarsi.
Lo spazio-tempo dice alla materia come muoversi.
John A. Wheeler

DESCRIZIONE GEOMETRICA DELLA GRAVITA'

Si passa
da una visione **"dinamica"** della gravitazione
ad una visione
"cinematica"
o meglio ancora
"geometrica".

La geometria da usare **non** è però quella euclidea:
lo spazio-tempo non è euclideo

SPAZIO-TEMPO NON EUCLIDEO

Cosa significa?

Pensiamo ad una **superficie sferica**,

pensando **che essa sia tutto ciò che esiste**.

In questo spazio-tempo:

1) le "rette" sono **le circonferenze massime** e **le geodetiche sono archi di circonferenza**

2) **Non esistono** rette parallele

3) La somma degli angoli interni di un triangolo è **maggiore** di 180°

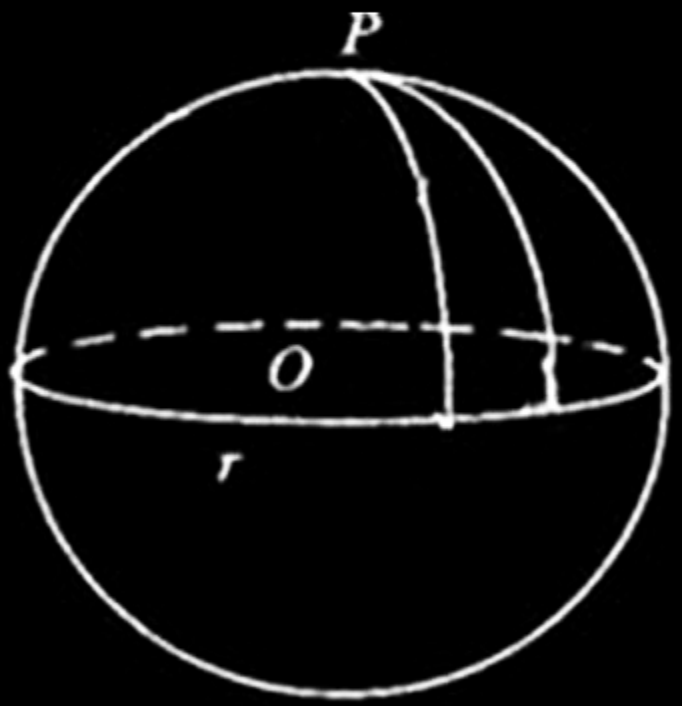
ESEMPIO DELLA SUPERFICIE SFERICA (geometria non euclidea ellittica)

Supponiamo che lo spazio-tempo sia come questa superficie sferica .

Consideriamo due punti che si muovono su due “rette” diverse.

Noi **li vediamo avvicinare** e **potremmo** interpretare ciò come **l’effetto di una forza attrattiva tra i due** ,

ma essi stanno solo percorrendo la propria geodetica



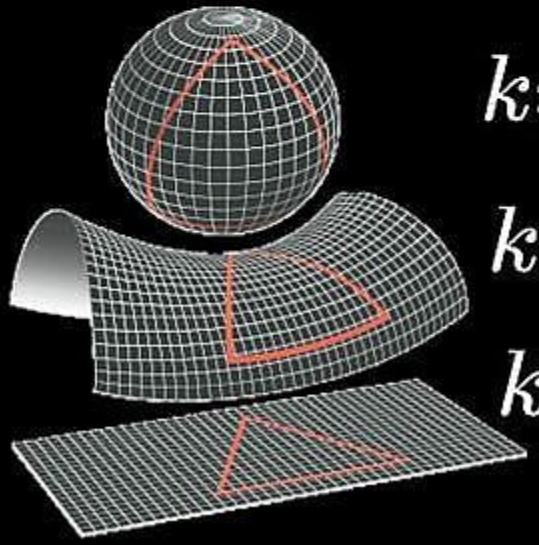
Equazioni di Friedmann

$$\dot{R} = \left[R^2 \frac{8\pi G\rho + \Lambda c^2}{3} - kc^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\ddot{R} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right)R + \frac{\Lambda c^2}{3}R$$

Aleksandr Aleksandrovič Fridman
(San Pietroburgo, 6 giugno 1888 – Pietrogrado, 16 settembre 1925)

R = Raggio dell'Universo
$\dot{R}$ = Velocità di espansione
$\ddot{R}$ = Accelerazione dell'espansione
ρ = Densità media della materia
p = Pressione
c = Velocità della luce
G = Costante di Gravitazione Universale
Λ = Costante cosmologica
k = Parametro di curvatura



$k = +1$

$k = -1$

$k = 0$

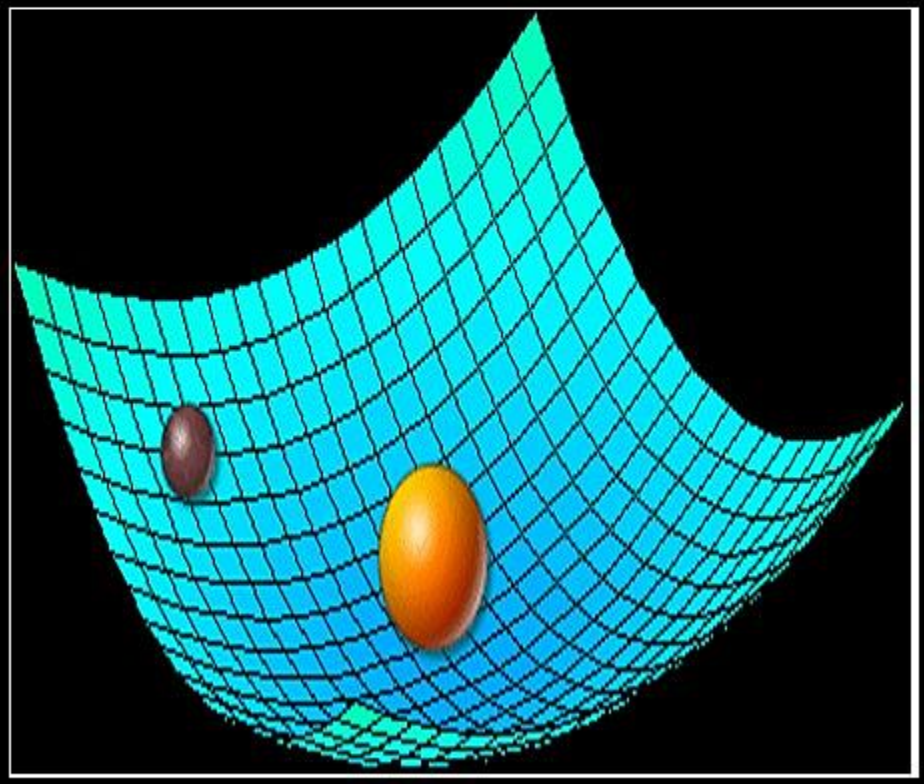
MOTI NELLO SPAZIO-TEMPO

Lo spazio-tempo della relatività generale ha una geometria non euclidea .

Una massa non soggetta a forze che si trova nello spazio-tempo per il 1° principio della dinamica si muove di moto rettilineo uniforme, ma le “rette” che percorre sono le geodetiche!

MOTI NELLO SPAZIO-TEMPO

La massa scura, che è libera, non è "attratta dalla massa arancione" , ma segue l'andamento dello spazio- tempo intorno alla massa arancione



CONFERME SPERIMENTALI

- 1- La deflessione della luce per effetto gravitazionale
- 2-La precessione del perielio di mercurio
- 3-Il red shift gravitazionale
- 4-Il rallentamento gravitazionale degli orologi
- 5-Le onde gravitazionali

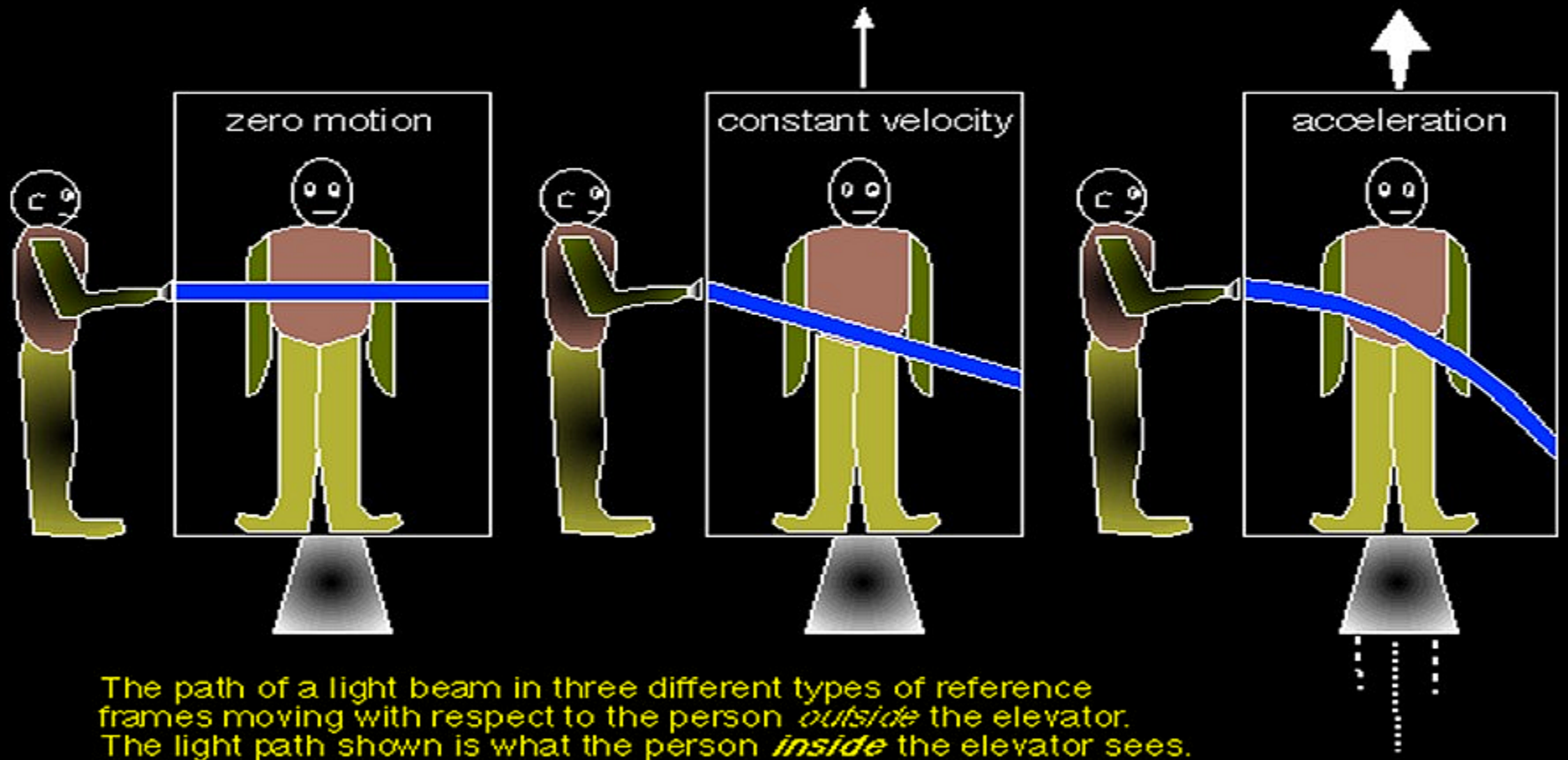
CONFERME SPERIMENTALI:
1- Deflessione della luce

Ci si aspetta che la traiettoria della luce vicino ad una massa (in un campo gravitazionale) sia curva per due motivi :

1) In un sistema di riferimento accelerato la luce segue una traiettoria curvilinea; per il principio di equivalenza non c'è differenza tra un sistema accelerato e un campo gravitazionale,quindi anche in un campo gravitazionale la luce deve seguire una traiettoria curvilinea
2) La luce trasporta energia e l'energia è massa.

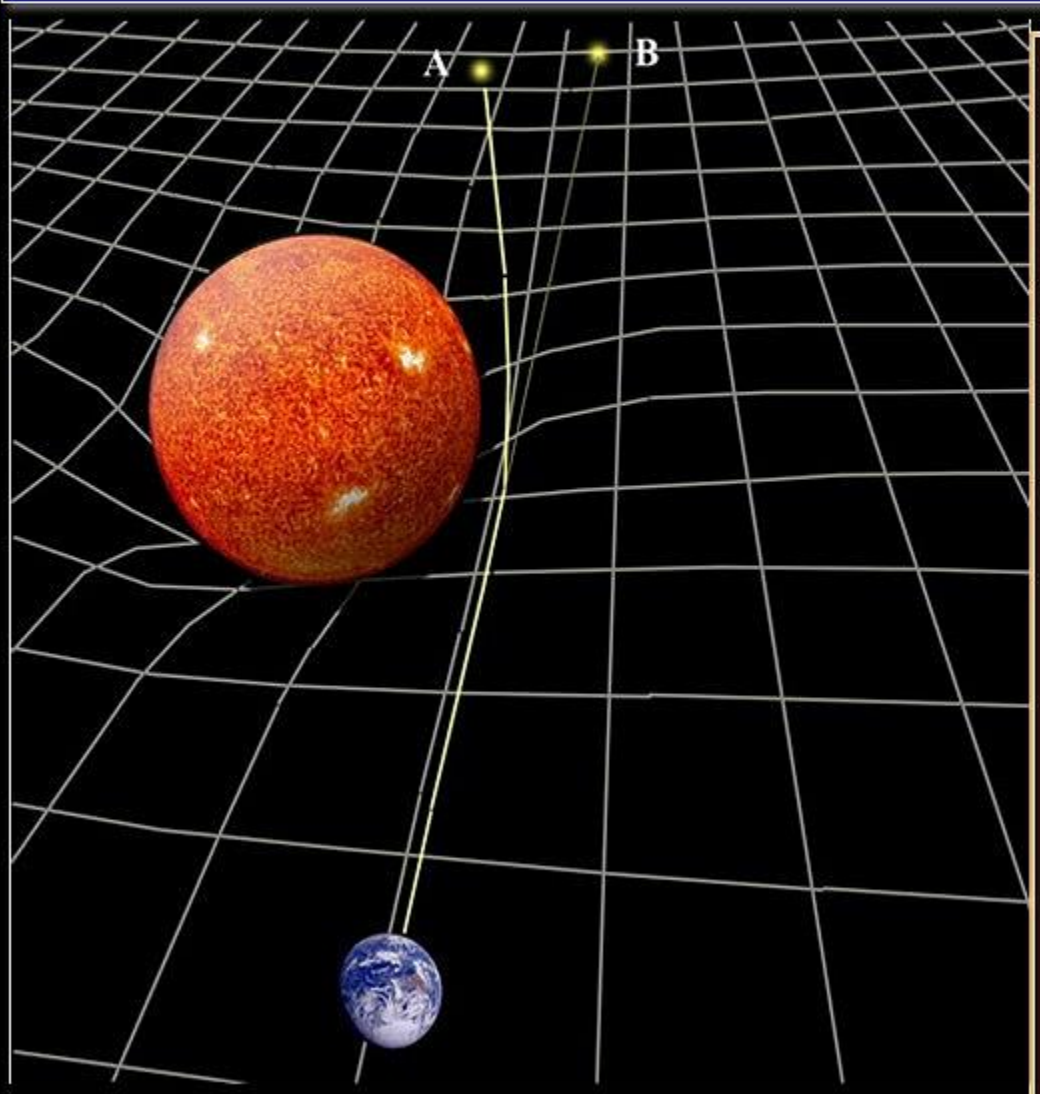
E' vero!!!

CONFERME SPERIMENTALI:
1- Deflessione della luce



The path of a light beam in three different types of reference frames moving with respect to the person *outside* the elevator. The light path shown is what the person ***inside*** the elevator sees. Under large acceleration, the beam of light will curve downward. It should also do that in a region of strong gravity.

CONFERME SPERIMENTALI:
1- Deflessione della luce



Un raggio di luce proveniente dalla stella A **viene curvato** passando nelle vicinanze del Sole.

La stella viene osservata nella **posizione apparente B** data **dalla proiezione del raggio di luce** che arriva a Terra.

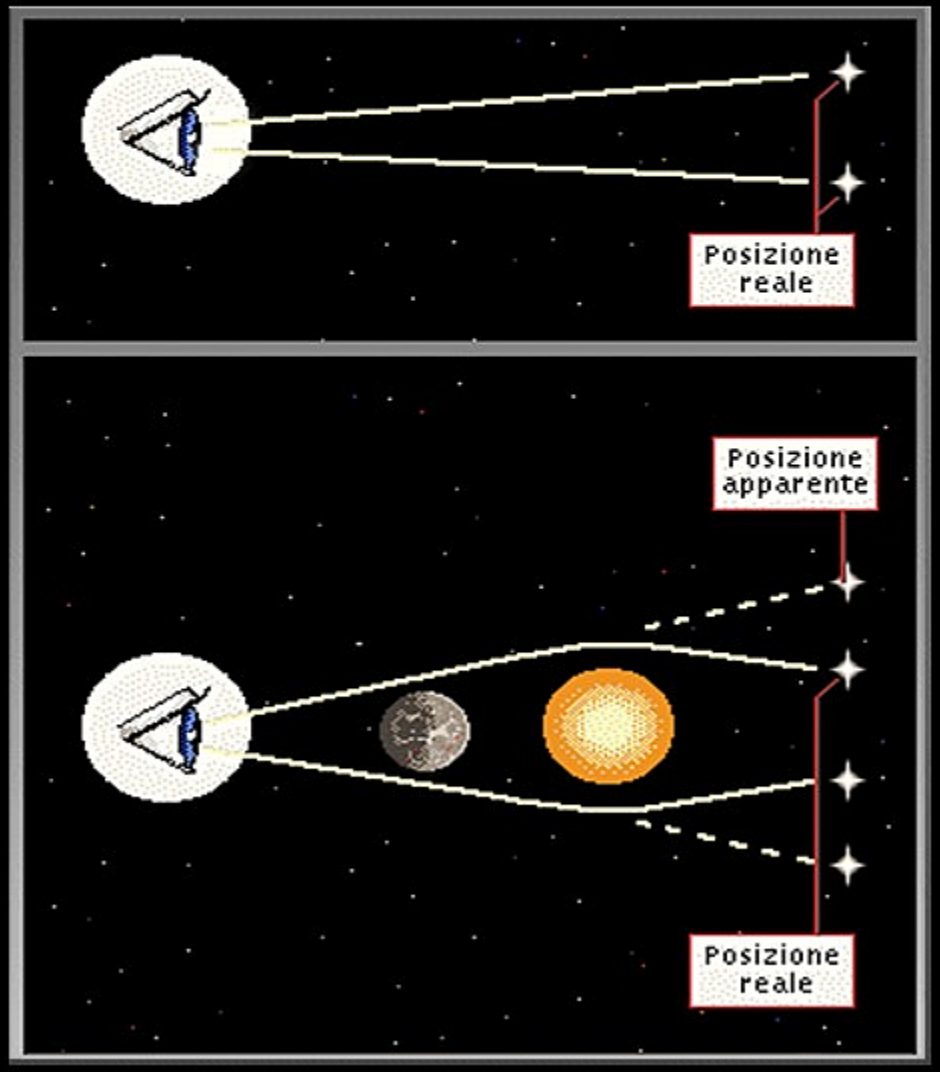
I raggi di luce vengono curvati passando nelle vicinanze di una grande massa.

CONFERME SPERIMENTALI:
1- Deflessione della luce

La congettura sulla curvatura della luce fu verificata sperimentalmente per la prima volta nel 1919 da Eddington durante un'eclissi totale di Sole.

Durante un'eclisse totale, infatti, si possono vedere alcune delle stelle più brillanti del cielo. Confrontando una lastra fotografica ripresa al telescopio durante l'eclisse, con una della stessa regione del cielo ripresa durante la notte, si sarebbero potute notare delle differenze nella posizione delle stelle.

CONFERME SPERIMENTALI:
1- Deflessione della luce



- Figura A

  Le stelle vengono osservate in assenza del Sole. Il raggio di luce che parte da esse giunge direttamente agli occhi dell'osservatore

- Figura B

  Le stelle vengono osservate in presenza del Sole.

  Il raggio di luce che parte da esse viene deflesso dal campo gravitazionale del Sole e l'osservatore le vede in **una posizione differente** rispetto a quella della figura A.

  E' necessaria l'eclissi in modo che la luce del Sole non copra la luce da esse emessa

CONFERME SPERIMENTALI:
1- Deflessione della luce

La prima osservazione di deflessione della luce venne effettuata nel 1919 da Arthur Eddington e suoi collaboratori durante un' eclissi solare totale, in modo da poter vedere la luce emessa dalle stelle vicine al Sole.

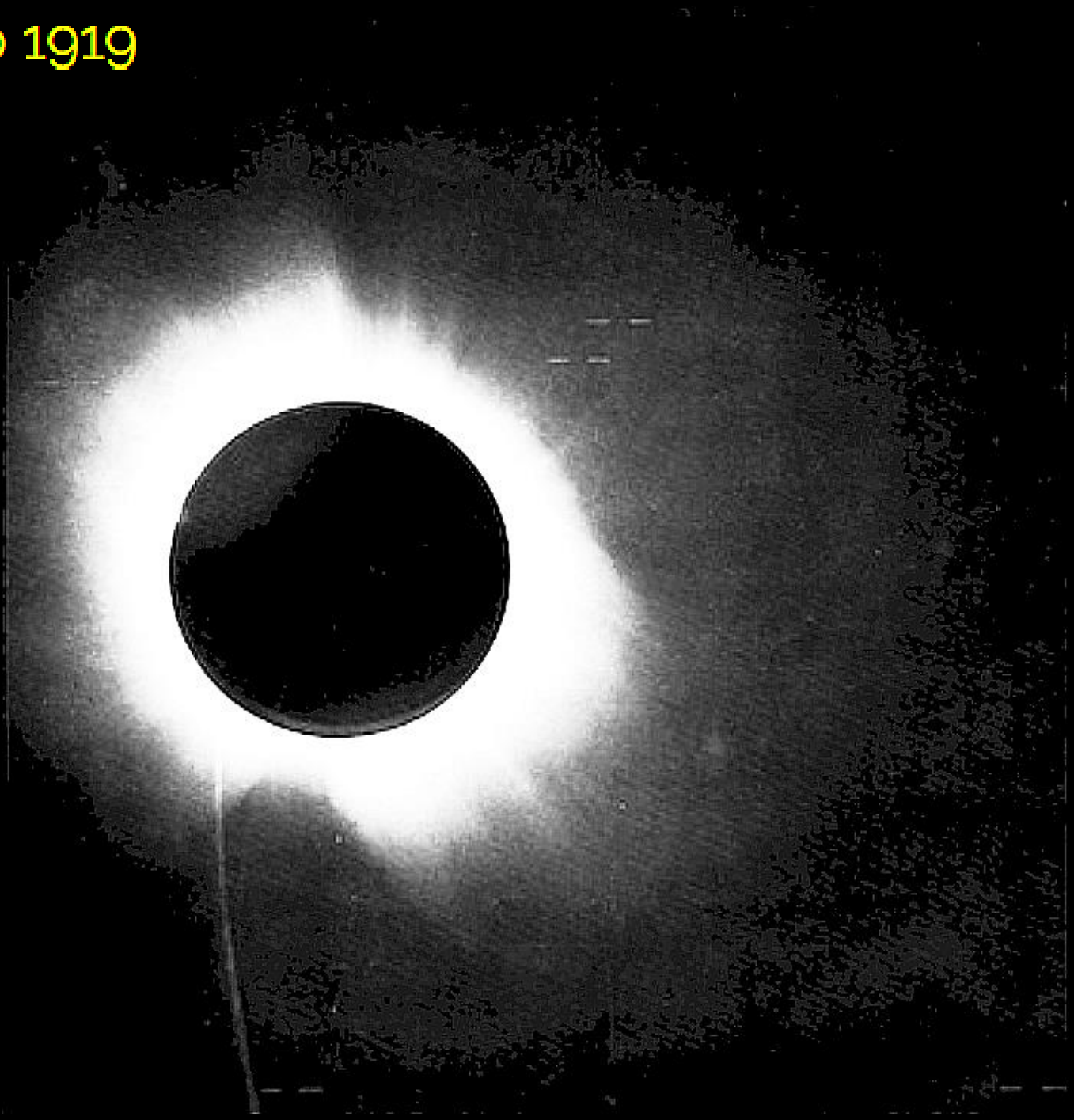
Le osservazioni vennero effettuate simultaneamente nelle città di Sobral (Brasile) e a São Tomé e Príncipe sulla costa occidentale dell'Africa.

Il risultato fu considerato una notizia straordinaria e finì sulle prime pagine di tutti i giornali più importanti, dando risonanza ad Einstein e alla sua teoria della relatività in tutto il mondo.

La mattina del 29 maggio 1919, sull'isola di Príncipe, la pioggia scendeva con una discreta intensità. Non ci sarebbe stato nulla di strano – soprattutto non per un gruppo di sudditi di Sua Maestà Giorgio V, sicuramente abituati a bizze meteorologiche di ogni tipo – se non fosse che quel giorno, sotto le nuvole gonfie di pioggia, si erano radunati scienziati provenienti da varie parti del mondo per osservare un'eclissi totale di Sole che avrebbe cambiato il corso della storia della scienza.

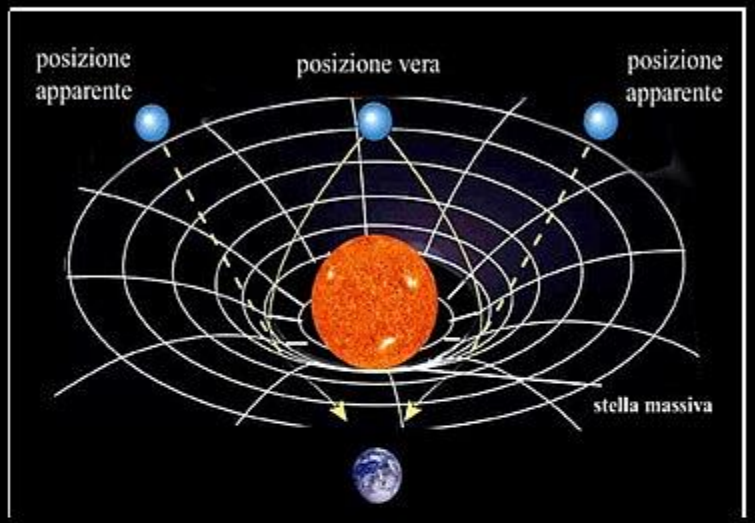
Fra questi, vi era Arthur Eddington, che come abbiamo visto era stato inviato sull'isola (oggi parte dello stato indipendente *São Tomé e Príncipe*, ma all'epoca ancora sotto il dominio portoghese) direttamente dall'Astronomo Reale Frank Dyson per fotografare l'eclissi e scoprire così se, dati alla mano, le previsioni sulla curvatura dello spazio della recentemente pubblicata teoria della relatività generale di Albert Einstein fossero veritiere.

29 maggio 1919

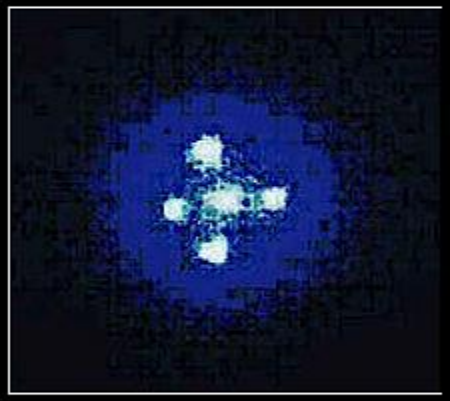


Dopo aver elaborato i dati ottenuti, il verdetto fu positivo: il risultato di 1.61" ± 0.3" (in altre parole, un intervallo compreso fra 1.31 e 1.91 secondi di arco) era compatibile con la teoria della relatività generale (1.75"). **La luce delle stelle era deviata dalla presenza del Sole**, e lo era proprio come Einstein aveva previsto.

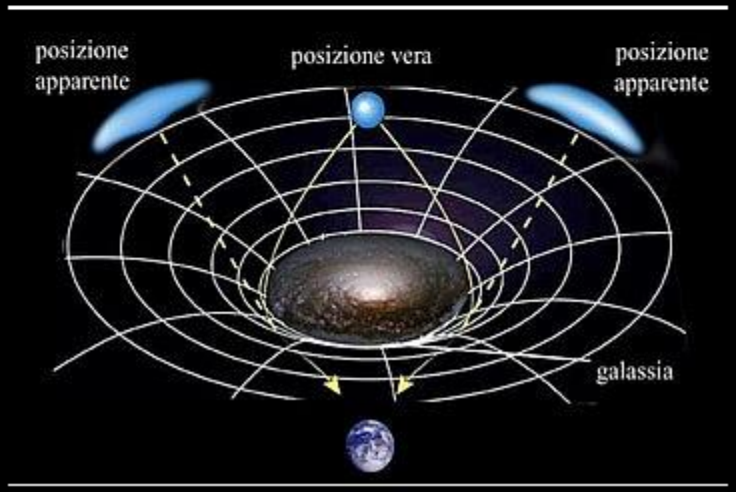
1-Deflessione della luce: Lente gravitazionale



Anello di Einstein



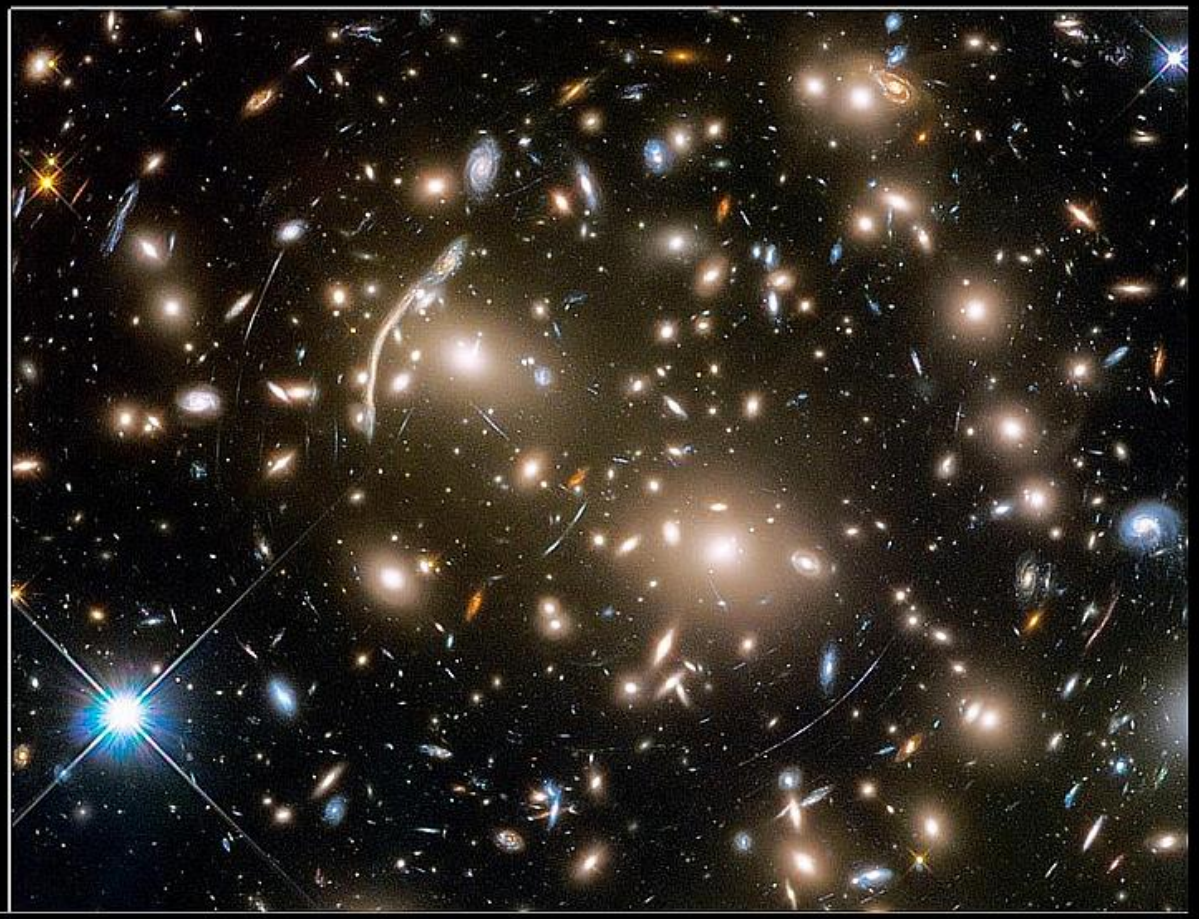
Croce di Einstein



Lente gravitazionale disomogenea

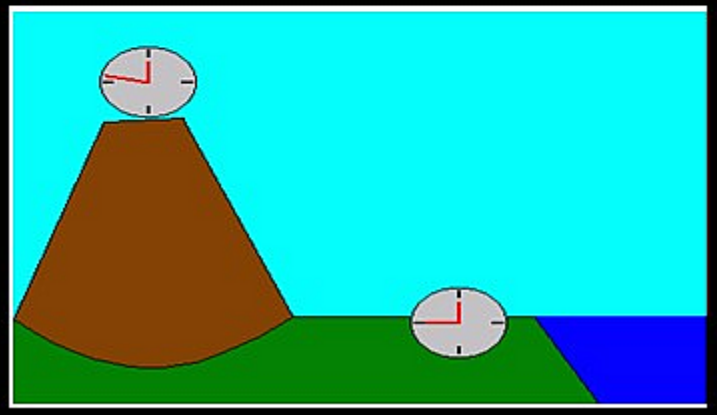
Le lenti gravitazionali

- L'immagine di destra è uno spettacolare effetto dovuto alla deflessione gravitazionale della luce chiamato «lente gravitazionale»



2-Rallentamento gravitazionale degli orologi

Dove la gravità, ovvero la curvatura dello spazio-tempo è più forte , il tempo scorre più lento.



Orologi più veloci in montagna,
più lenti a livello del mare
E' stato verificato sperimentalmente!!!

I buchi neri

I buchi neri sono previsti dalla Relatività Generale: regioni in cui la curvatura è così forte da intrappolare anche la luce

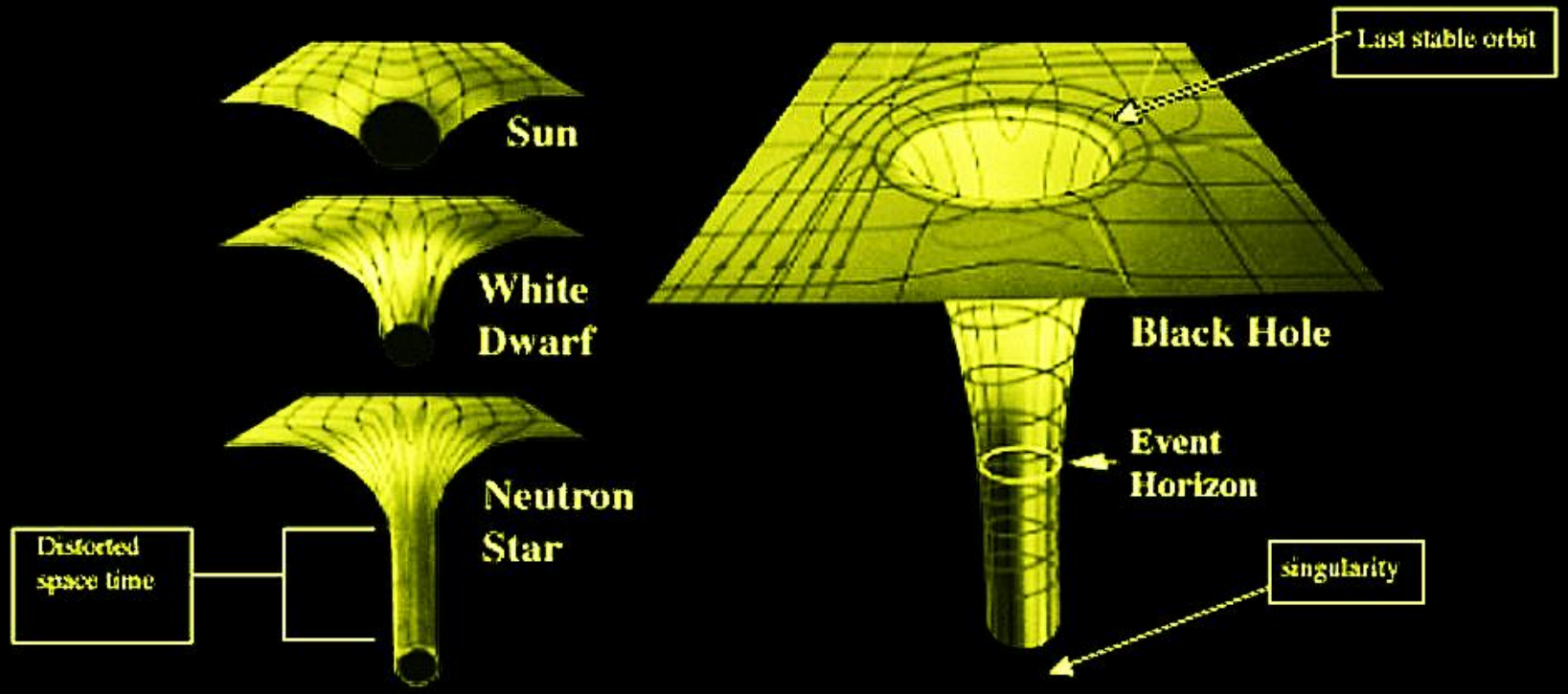
"E' un oggetto la cui forza di gravità è talmente intensa che nulla può sfuggirgli, nemmeno la luce"

(Wheeler)

E' impossibile vedere un buco nero, ma la sua presenza può essere rilevata indirettamente, tramite gli enormi effetti gravitazionali che esso produce.

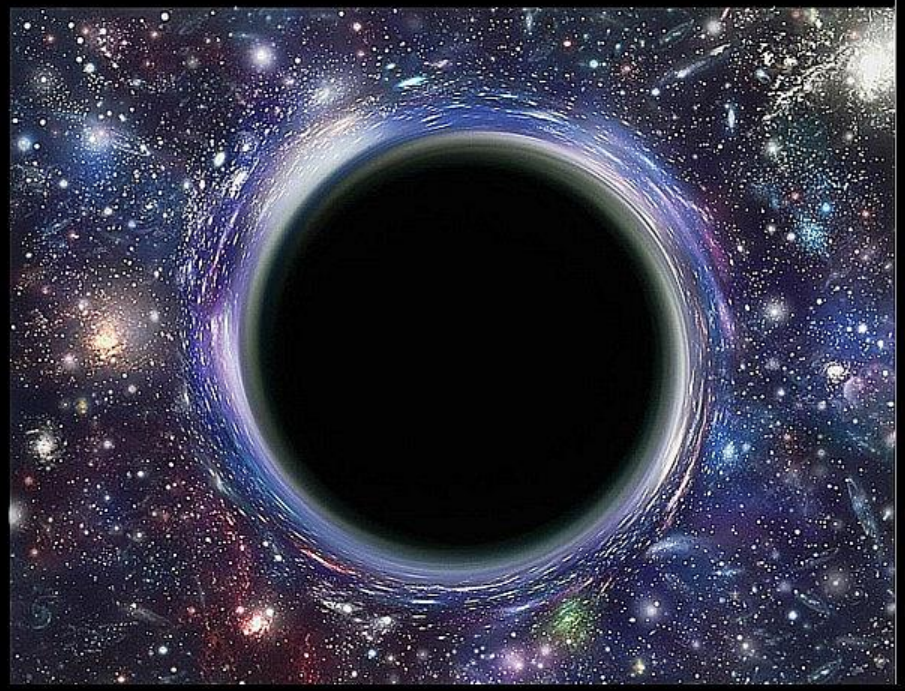
I buchi neri

STELLE CON MASSA 20 VOLTE SUPERIORE A QUELLA DEL SOLE DANNO ORIGINE AD UN BUCO NERO



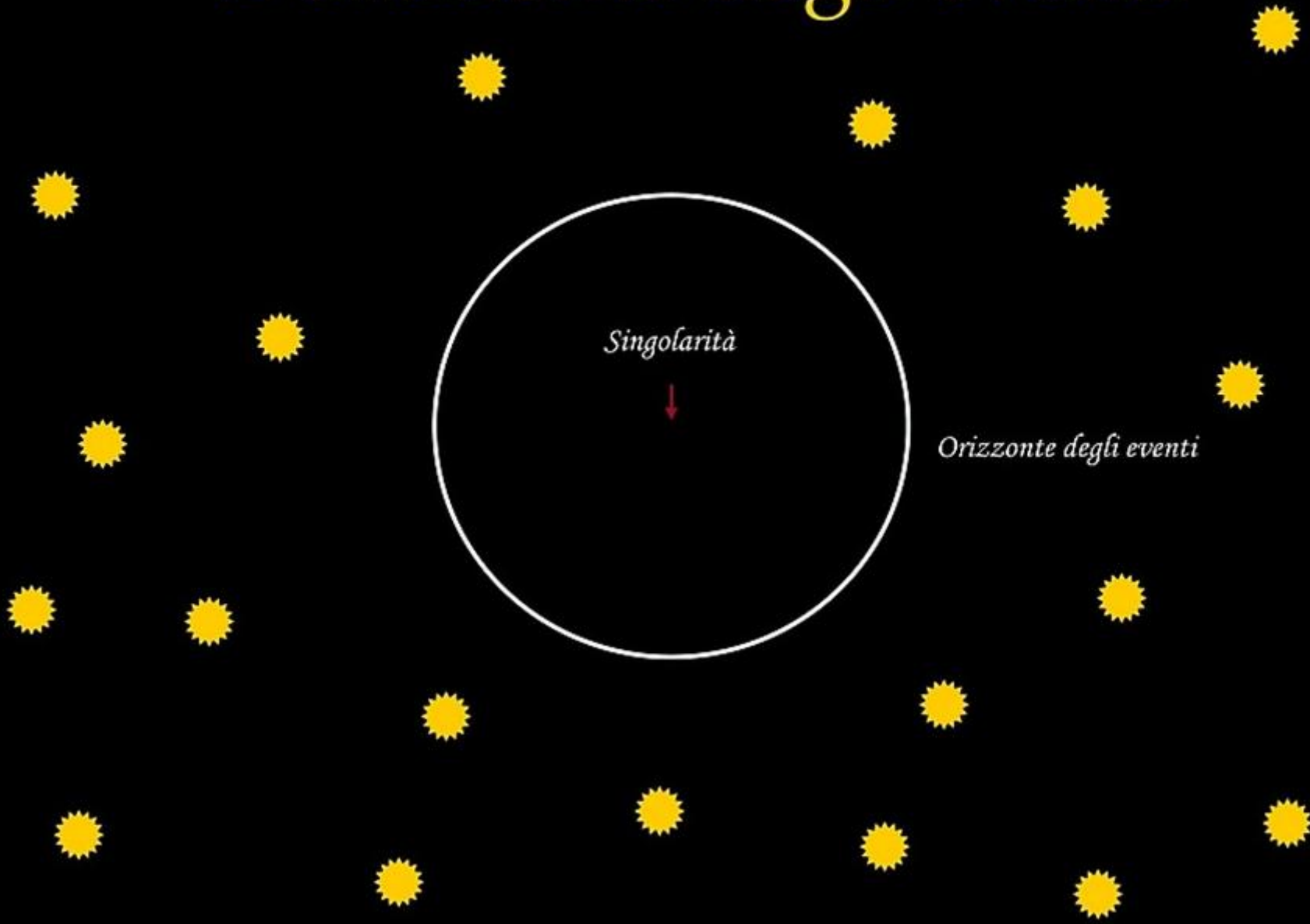
Buchi Neri

- Se una stella inizialmente ha una massa superiore a qualche decina di masse solari non si conosce nessun meccanismo che possa fermare il suo collasso gravitazionale una volta esaurito il combustibile che alimenta le sue reazioni nucleari
- Si forma un Buco Nero, un oggetto la cui fisica è comprensibile solo nell'ambito della Relatività Generale

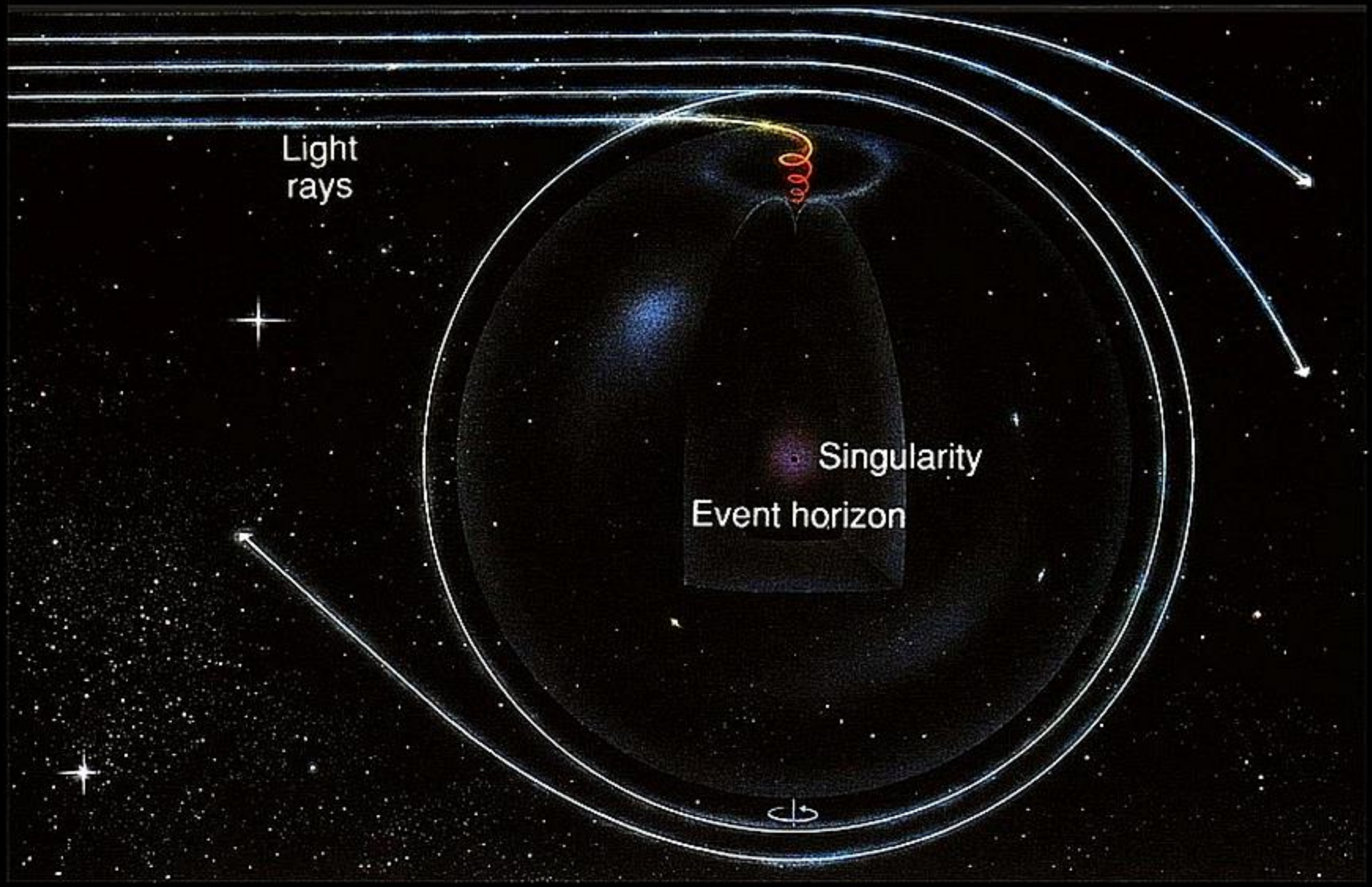


Come ci apparirebbe un buco nero

L'orizzonte degli eventi



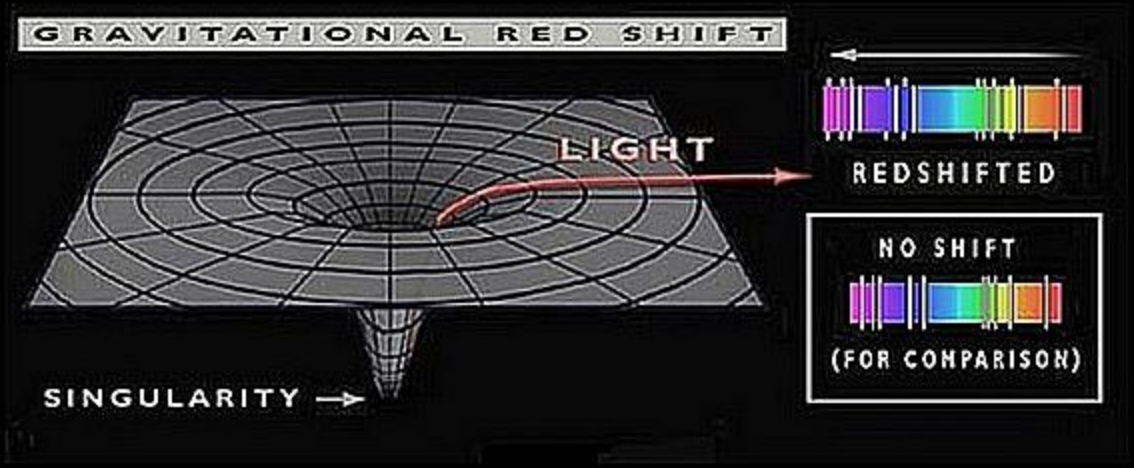
Deviazione dei raggi di luce



Caduta in un buco nero

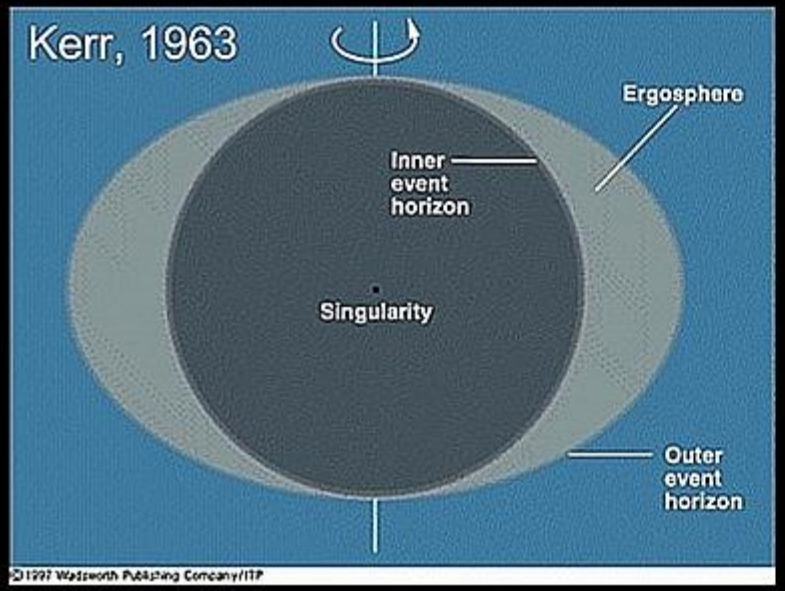
Visto da un osservatore esterno, il tempo di caduta sull'orizzonte di un buco nero è infinito.

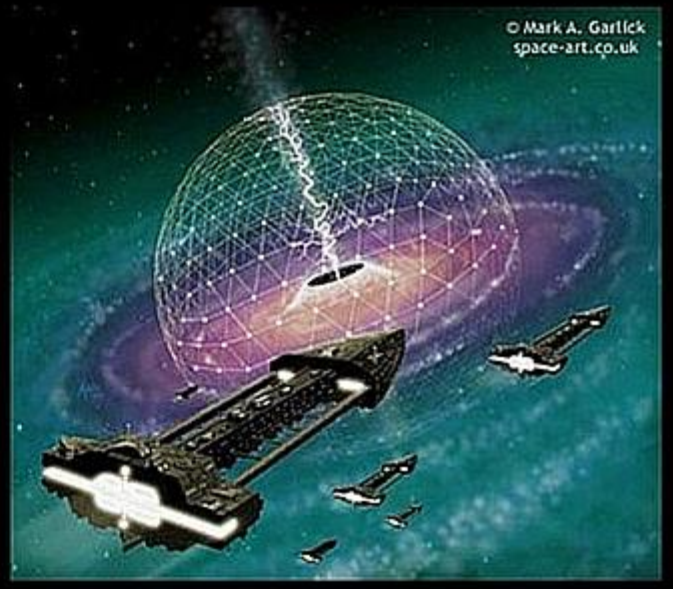
Un osservatore che cade in un buco nero misura invece un tempo finito di caduta nella singolarità.



- **Kerr**: *rotante*
  - massa *M*
  - momento angolare *J*

Buco nero in rotazione





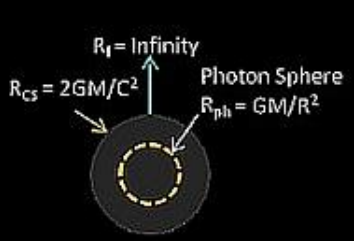
Si può entrare e uscire dall'ergosfera di un buco nero.

Nell'ergosfera è impossibile seguire una traiettoria radiale diretta verso il buco nero: lo spazio-tempo è trascinato dal moto di rotazione.

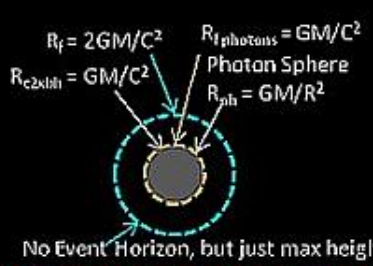
Tutta l'energia associata alla rotazione di un buco nero si trova immagazzinata nell'ergosfera e può dunque essere estratta.

Black Hole Radii Equations

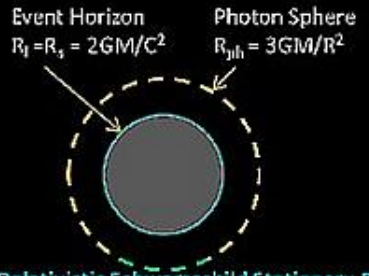
Black Hole Description	Event Horizon Radius (or Ergosphere Radius)	Maximum Height R_f	Photon Sphere R_{ph}
Classical Schwarzschild	$R_{cs} = 2GM/C^2$	$R_f = Infinity$	$R_{ph} = GM/C^2$
Classical finite (twice) height	$R_{c2xbh} = GM/C^2$	$R_f = 2GM/C^2$	$R_{ph} = GM/C^2$
Relativistic Schwarzschild	$R_s = 2GM/C^2$	$R_f = 2GM/C^2$	$R_{ph} = 3GM/C^2$
Relativistic Charged	$R_q = GM/C^2 + / - \sqrt{((GM/C^2)^2 - q^2)}$	$R_f = 2GM/C^2$	$R_{ph} = 3GM/C^2$
Relativistic Spinning Kerr	$R_{spin} = GM/C^2 + \sqrt{((GM/C^2)^2 - a^2/C^2 * cos^2(\theta))}$	$R_f = 2GM/C^2$	$R_{ph} = 1 - 9GM/C^2$
Relativistic Spinning Charged	$R_{spinq} = GM/C^2 + \sqrt{((GM/C^2)^2 - a^2/C^2 * cos^2(\theta) - q^2)}$	$R_f = 2GM/C^2$	$R_{ph} = 1 - 9GM/C^2$



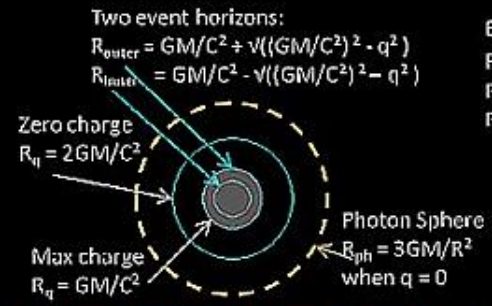
a) Classical Stationary Schwarzschild Dark Star



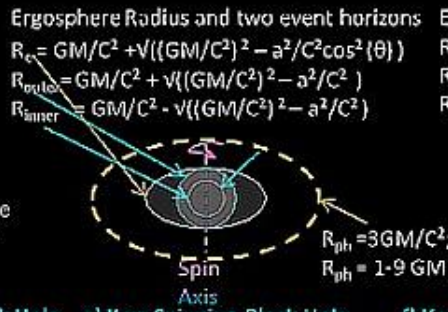
b) Classical Stationary Finite Black Hole



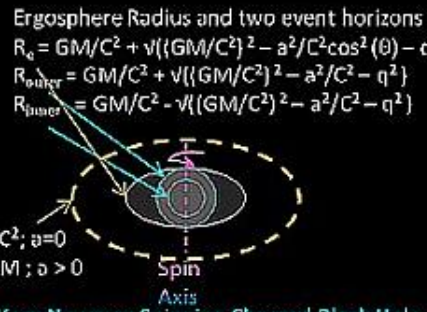
c) Relativistic Schwarzschild Stationary Black Hole



d) Reissner-Nordström Stationary Charged Black Hole



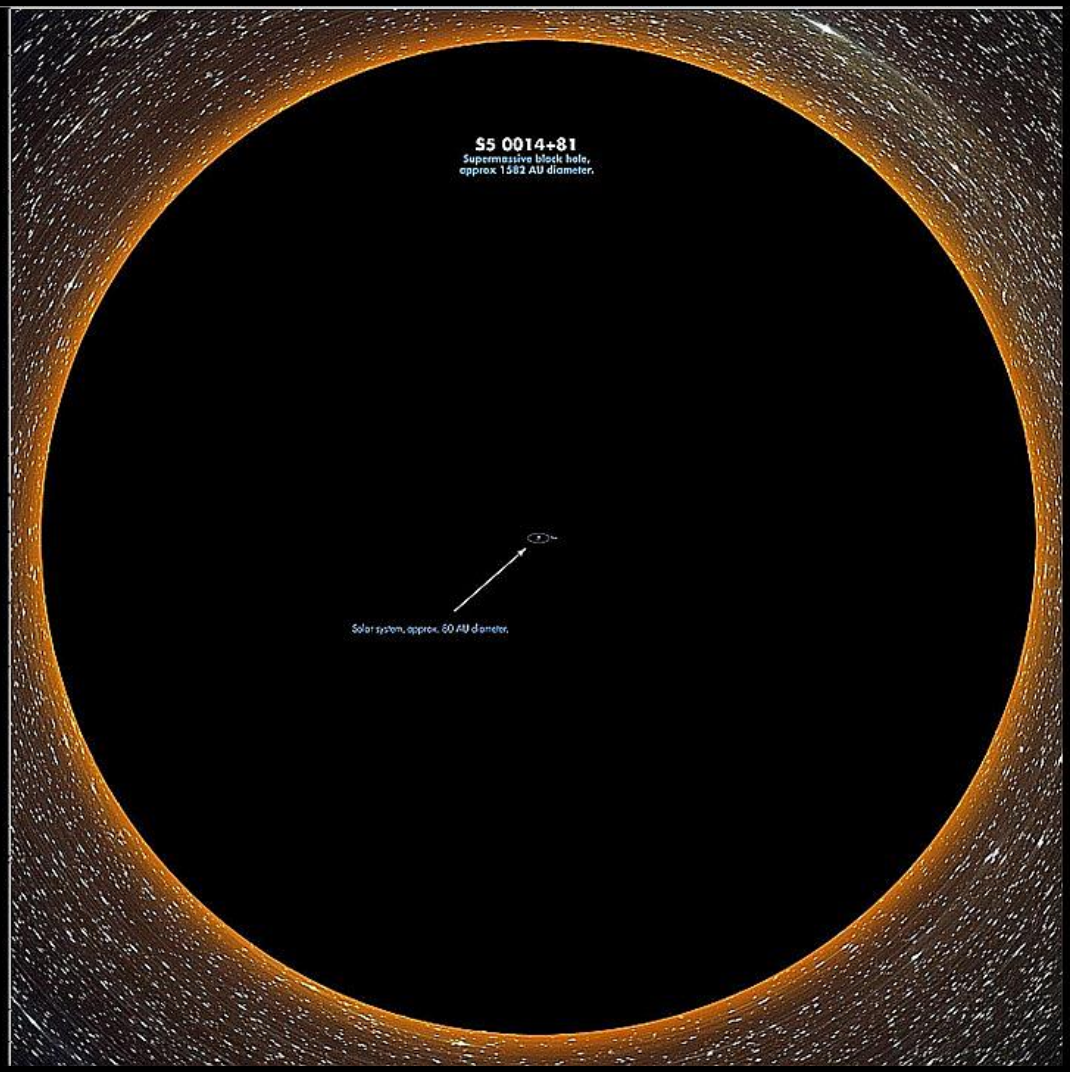
e) Kerr Spinning Black Hole



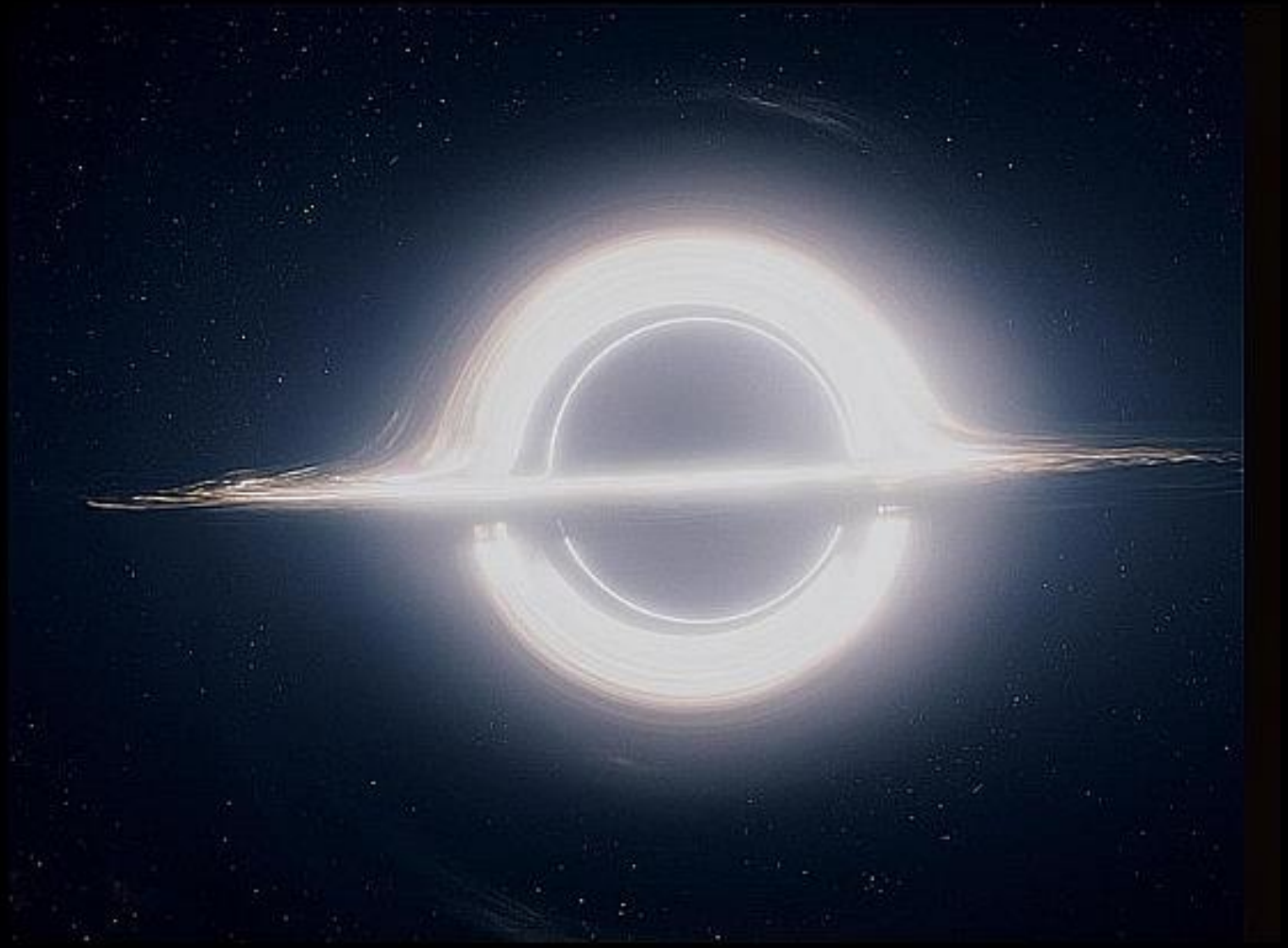
f) Kerr-Newman Spinning Charged Black Hole

I SMBH possono essere veramente grossi!

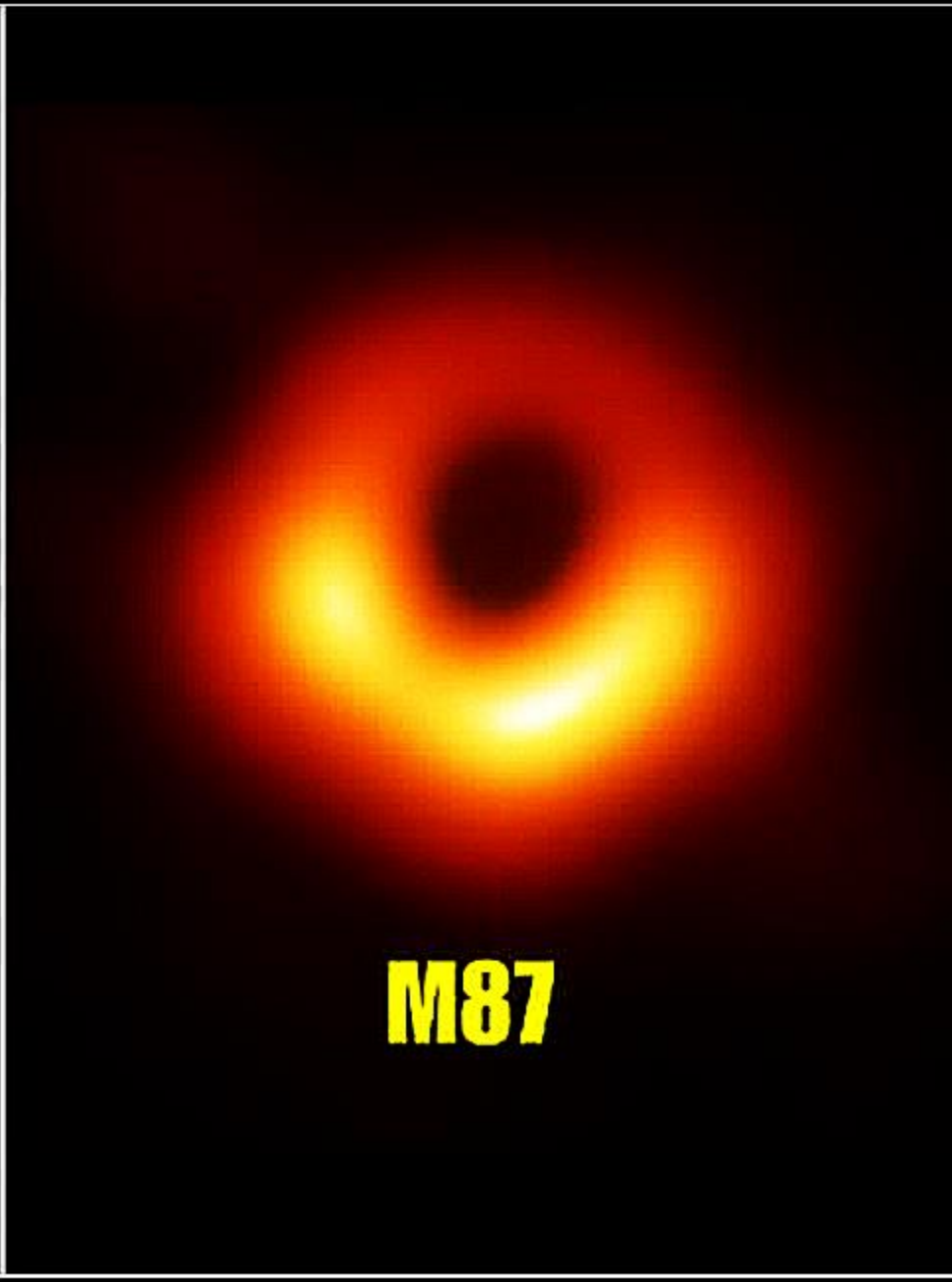
Costellazione Cefeo
S5 0014+81:
$M \sim 4 \cdot 10^{10} M_s$ e
$R \sim 2.4 \cdot 10^{11}$ km



Come apparirebbe un buco nero da «vicino»



Sagittarius A*

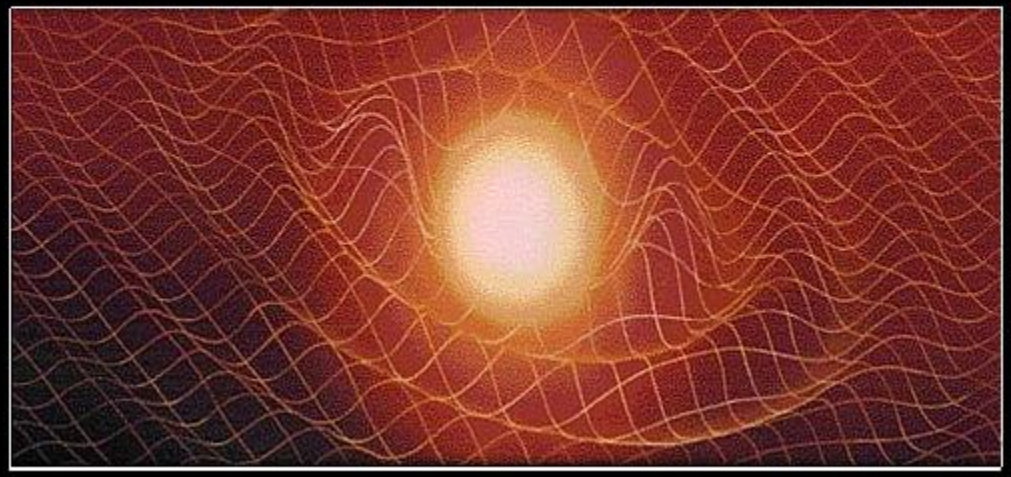

M87

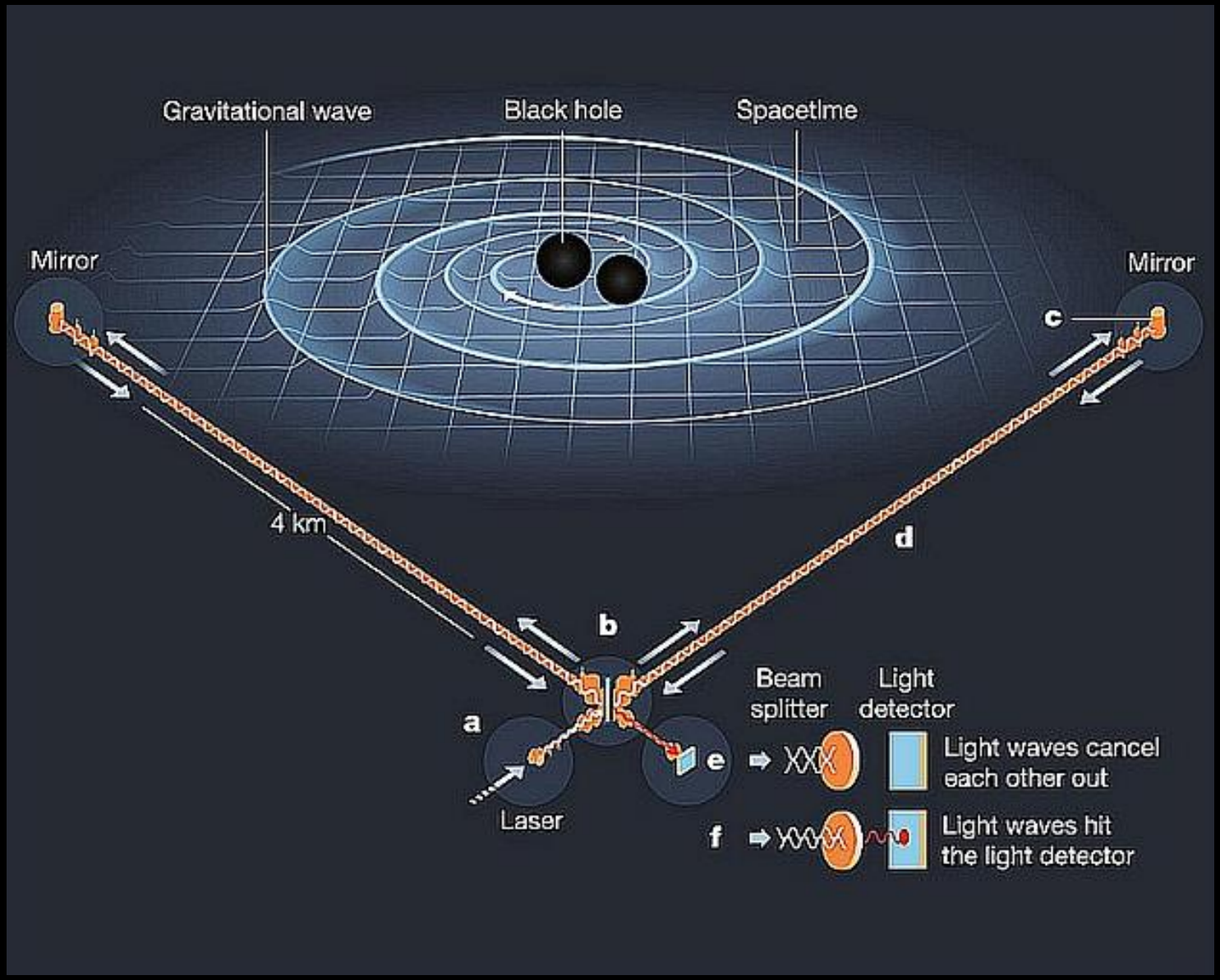
Onde gravitazionali

- Nel 1916 Einstein pubblicò un articolo in cui, sulla base della teoria della Relatività Generale appena pubblicata, si prediceva l'esistenza di onde gravitazionali

Onde Gravitazionali

increspature nella curvatura dello spaziotempo prodotte dal moto (a simmetria non-sferica) di massa-energia, che si propagano nello spazio alla velocità della luce





- La prima rilevazione diretta è invece del 2015, con l'osservazion della fusione di due buchi neri stellari