Università della Terza Età "Cardinale Giovanni Colombo" – Milano

A. A. 2022 - 2023

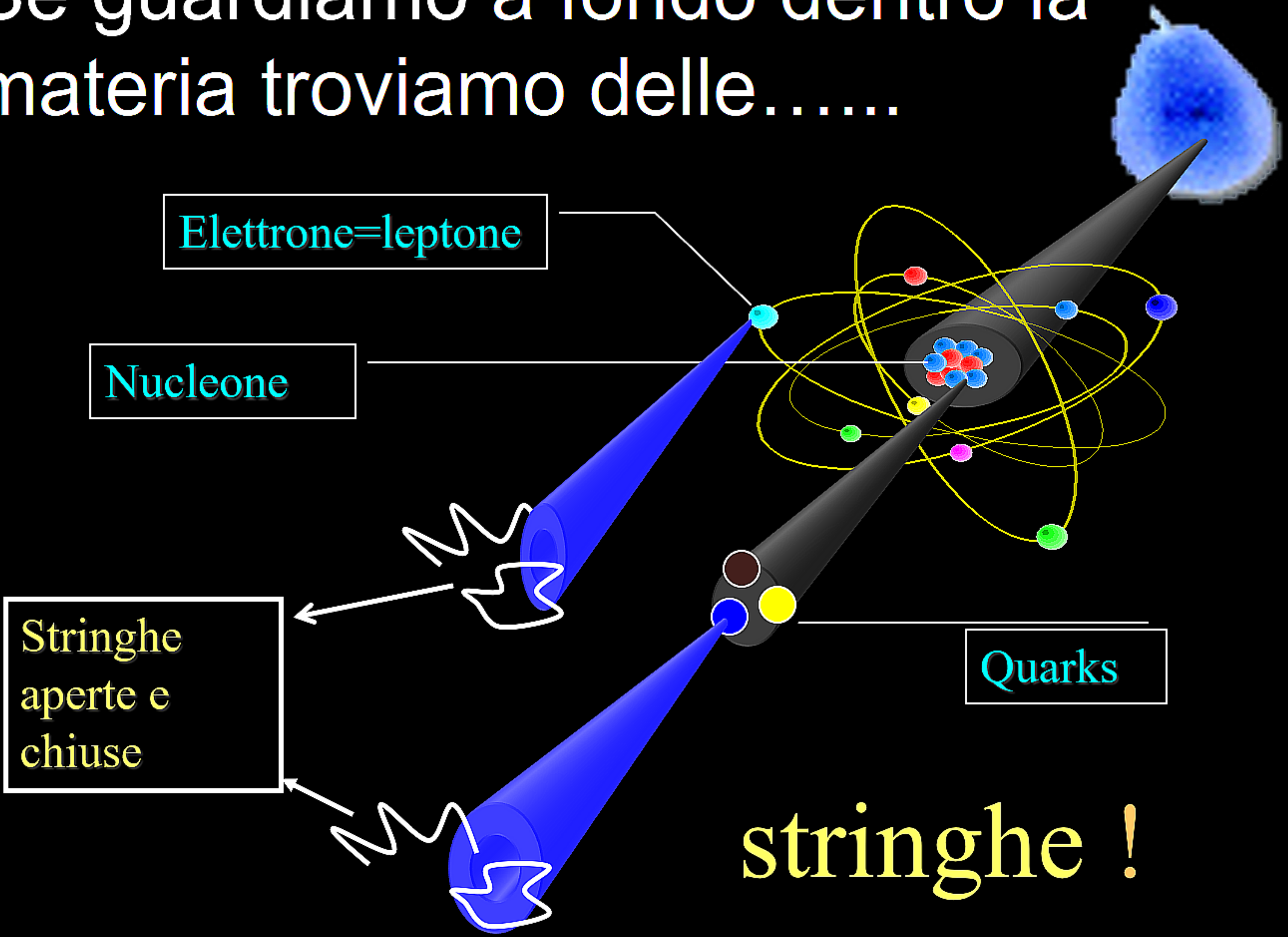
Corso di Astrofisica

Docente:

Adriano Gaspani

La Teoria delle Stringhe

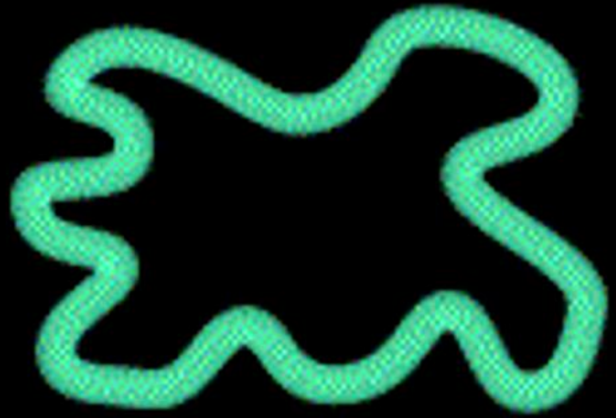
Se guardiamo a fondo dentro la materia troviamo delle……



stringhe !

I costituenti ultimi della materia sono delle minuscole cordicelle, dette STRINGHE

Stringa aperta

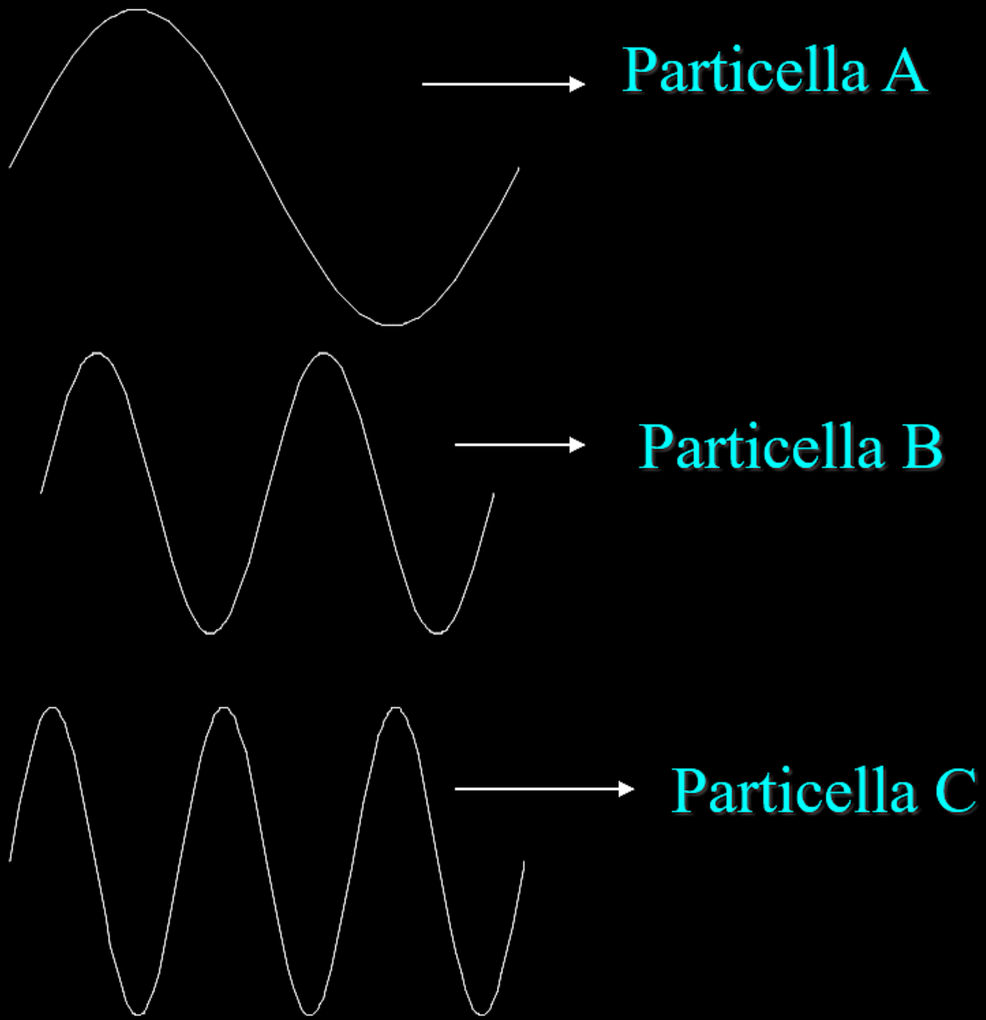


Stringa chiusa

Lunghezza caratteristica 10^{-33} cm

Le Particelle sono le note di un violino

Le particelle fanno un concerto



Tra le varie "note" emesse dalla stringa ci sono:

- le particelle del modello standard

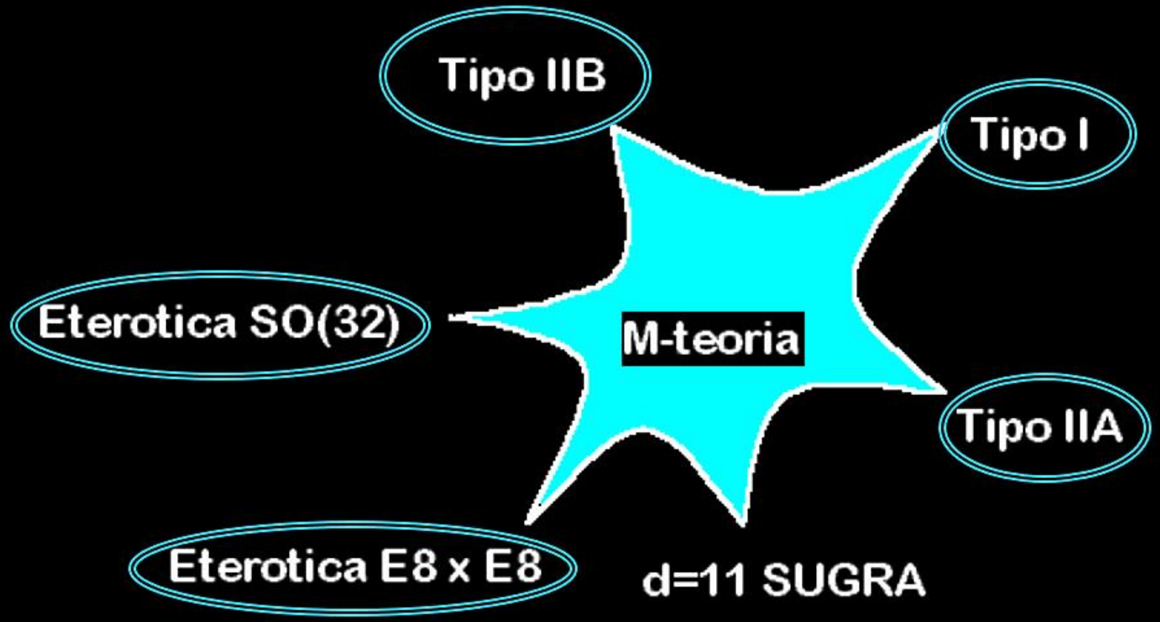
- il gravitone (mediatore della gravità)

Consistenza $\Rightarrow$ restrizioni

(1984)

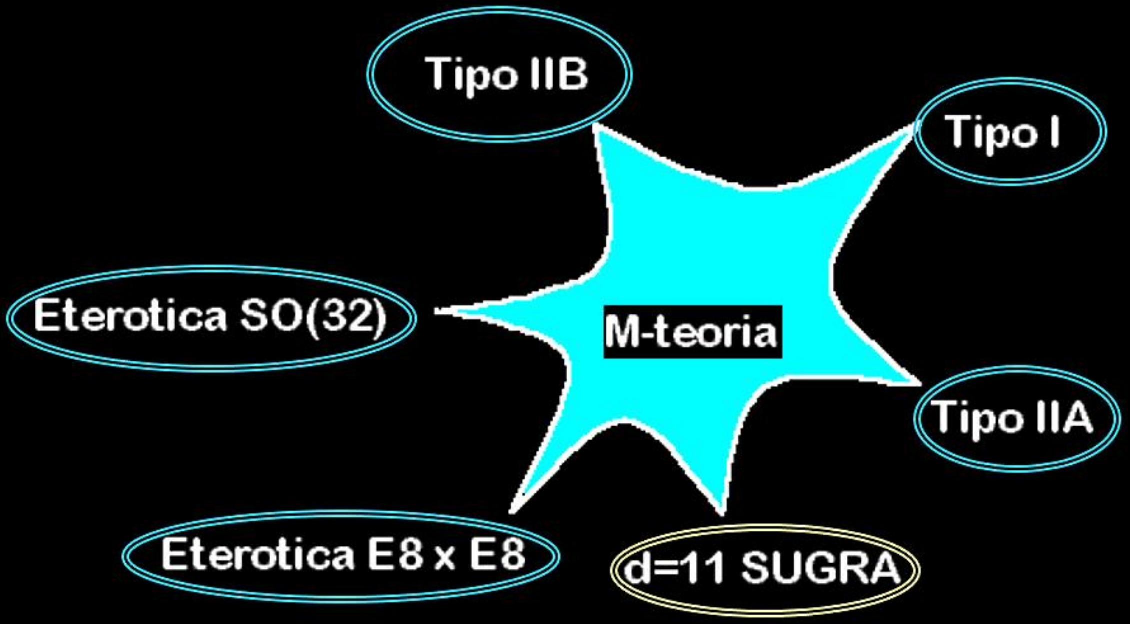
- Solo 5 teorie di superstringa sono consistenti

Consistenza ⇒ restrizioni



- Tutte richiedono uno spazio-tempo a 10 dimensioni !

Consistenza ⇒ restrizioni

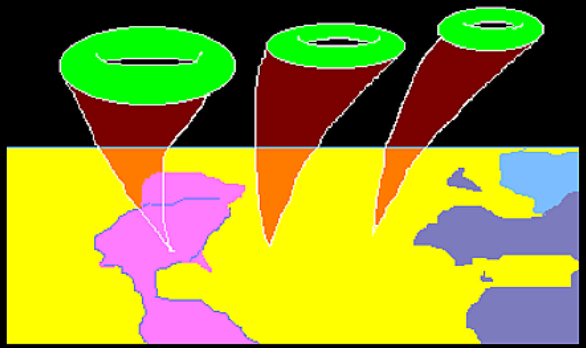


E sono collegate alla teoria di supergravità in D=11 che è la teoria efficace di una misteriosa M teoria unificante tutte le stringhe

Ma l' universo ha 4 dimensioni!

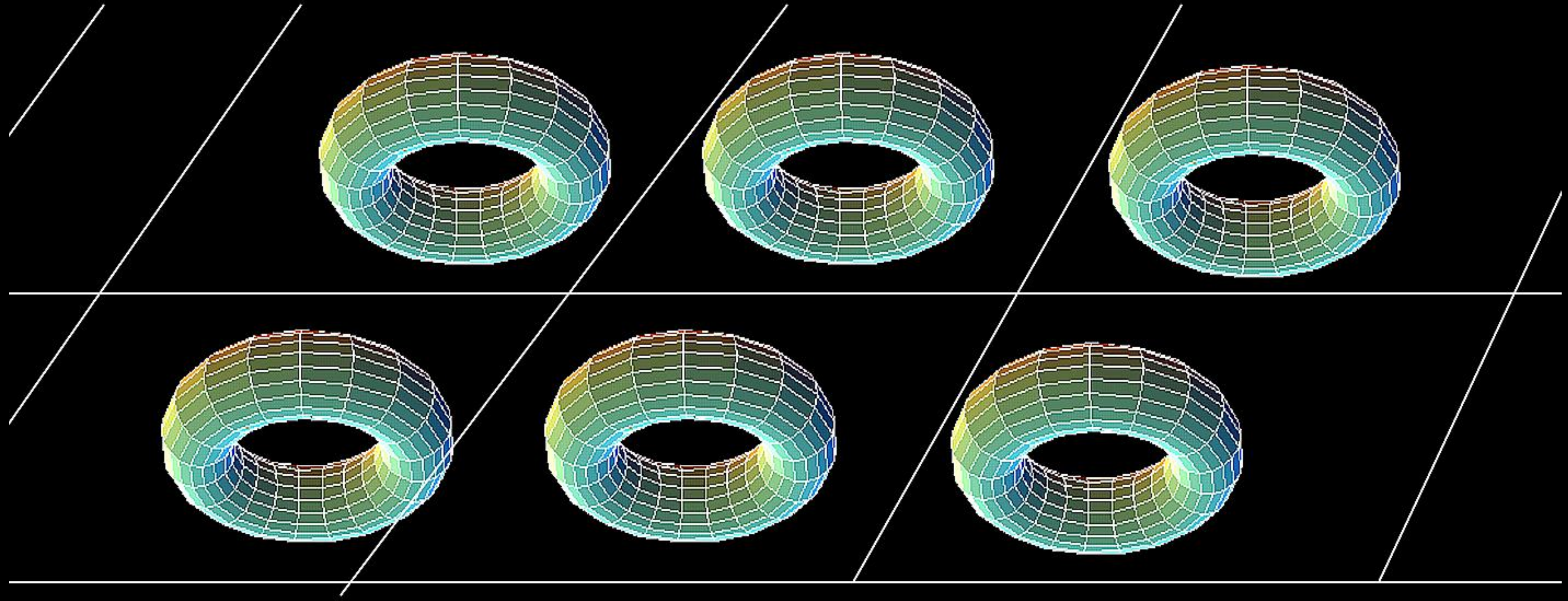
COMPATTIFICAZIONE $10 \Rightarrow 4$

se 6 dimensioni sono "piccole" ed arrotolate



Allora otteniamo delle teorie quadrimensionali il cui spettro di particelle e di campi é determinato dalla geometria delle dimensioni arrotolate

Abbiamo pure imparato.....
che la Teoria della Stringa oltre
alle dimensioni extra.......



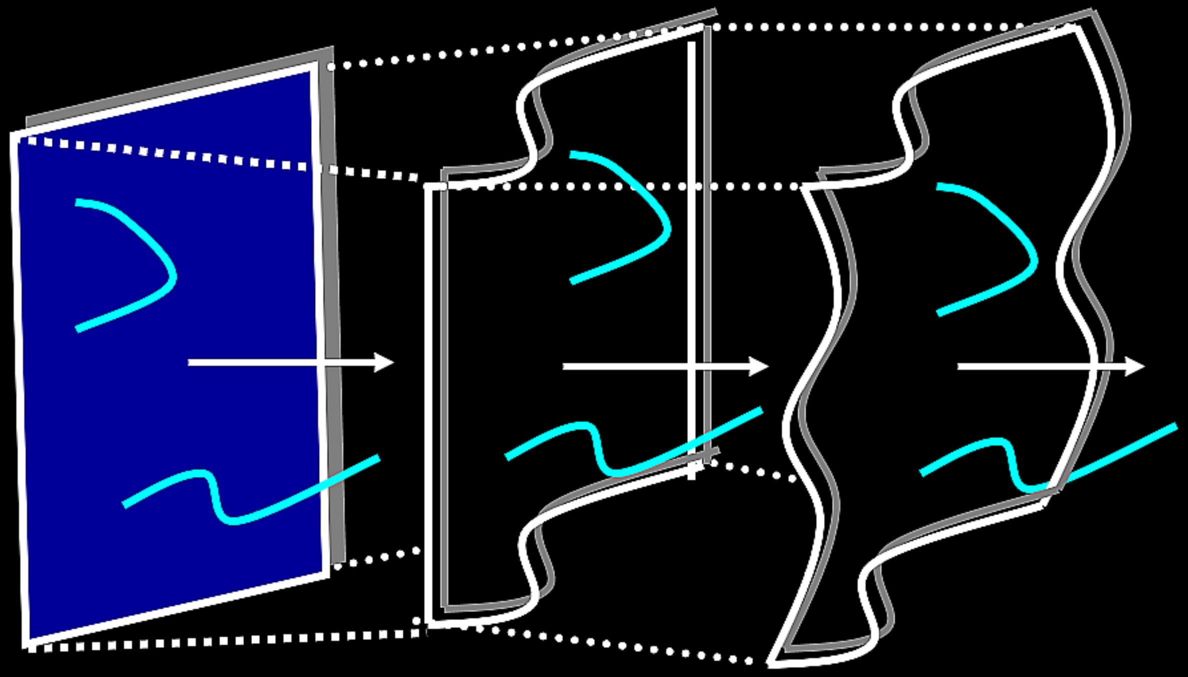
Abbiamo pure imparato.....
che la Teoria della Stringa oltre
alle dimensioni extra.......

implica anche
l’esistenza di

p-brane

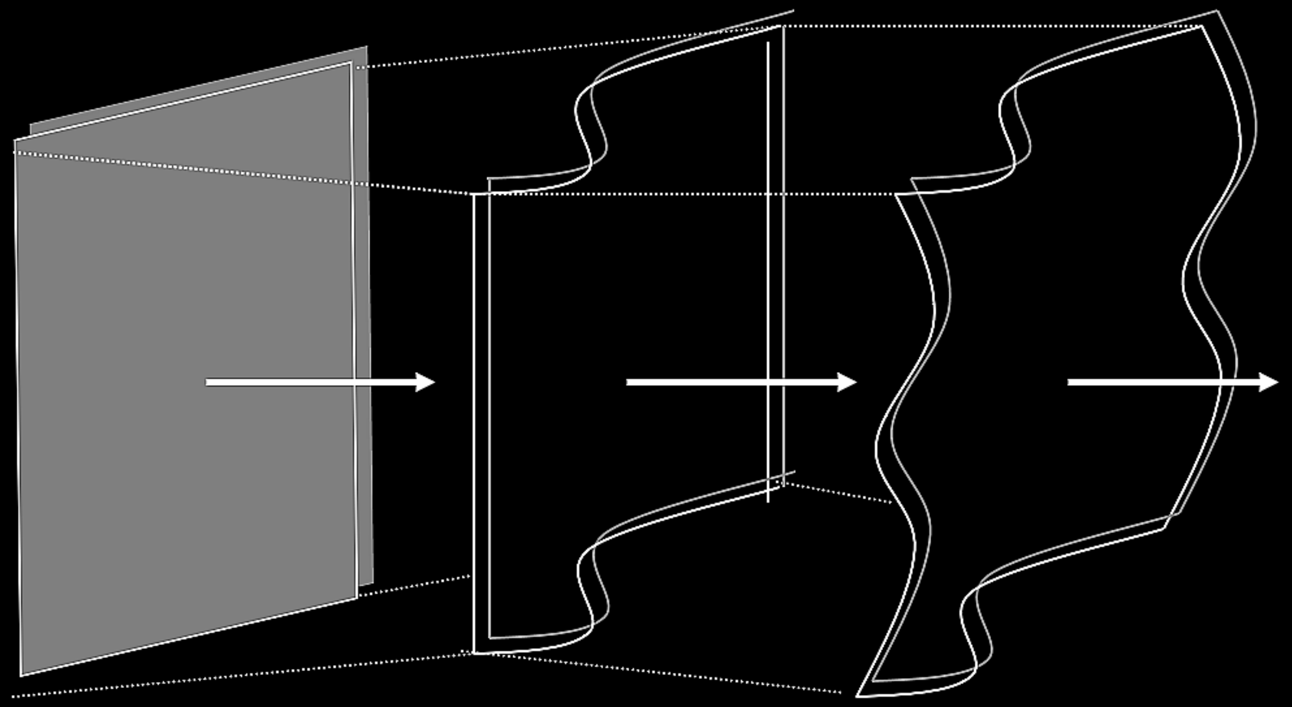
oggetti estesi p-dimensionali

(1990-95)



Le Dp-brane sono definite come le superfici a cui si attaccano gli estremi delle stringhe aperte.

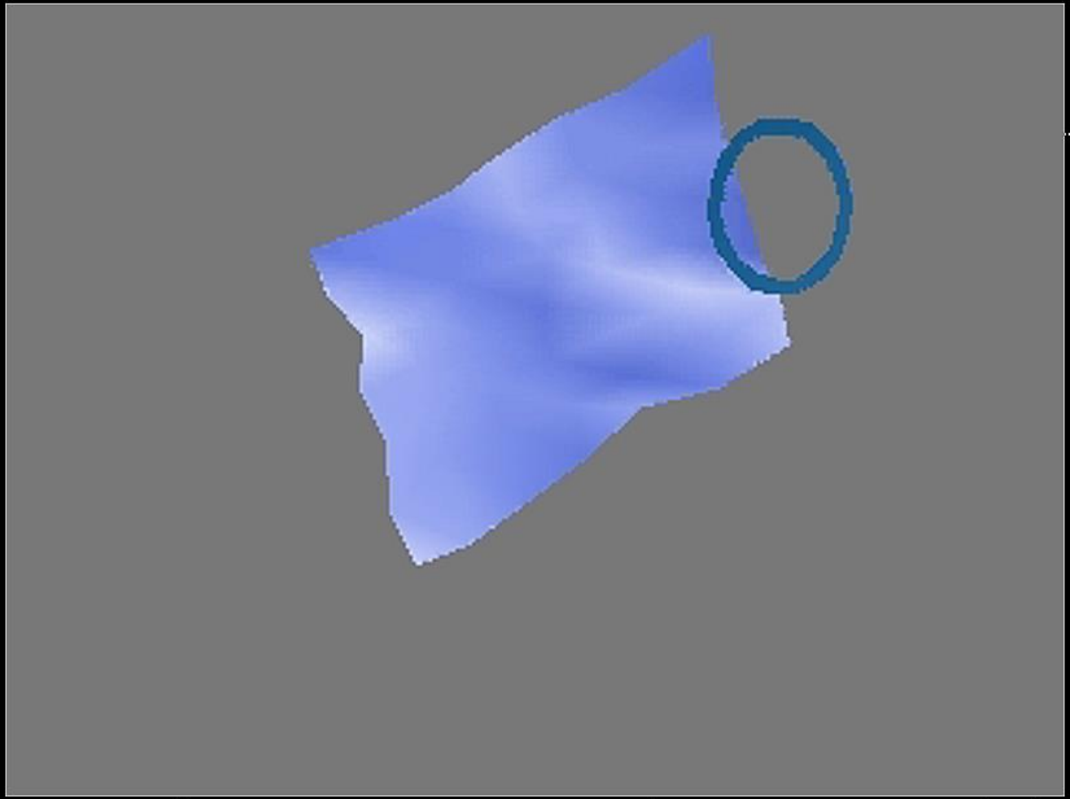
La Teoria delle Stringhe contiene oggetti estesi di tutte le dimensioni $0 \leq p \leq 9$



Le **p-brane** si muovono nello spazio a 10 dimensioni e descrivono delle superfici di mondo **p+1** dimensionali

Ad esempio una 2-brana evolve nel tempo e spazza una 3-superficie

La Teoria delle Stringhe contiene oggetti estesi di tutte le dimensioni $0 \leq p \leq 9$



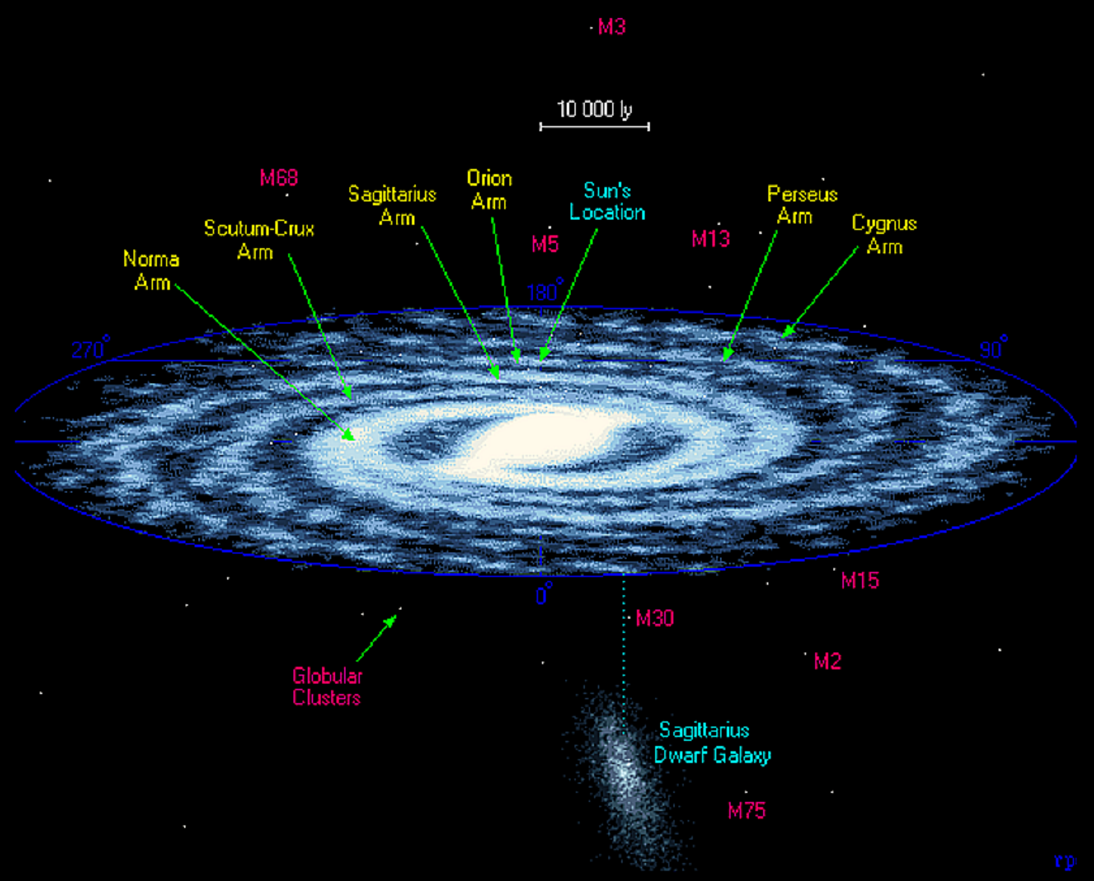
Le **p-brane** si muovono nello spazio a 10 dimensioni e descrivono delle superfici di mondo **p+1** dimensionali

Alternativamente possiamo considerare le Dp brane come bordi dello spazio tempo a 10 dimensioni che assorbono (od emettono) stringhe chiuse

La Teoria delle Stringhe unifica tutte le interazioni con la gravità e quantizza la Relatività Generale

- Vediamo dunque le sue applicazioni alla Cosmologia in cui l'interazione dominante è quella gravitazionale
- Si tratta di studiare le possibili soluzioni della teoria efficace (= supergravità) che dipendono solo dalla coordinata temporale (= t)
- Qui c'è un interessantissimo ***interplay*** con la Teoria dei Gruppi
- Come sempre, la Teoria delle Stringhe incorpora tutte le strutture matematiche più profonde e le realizza in maniera essenziale.
- ***Le algebre di Lie eccezionali*** (serie E) sono naturalmente realizzate dalla Stringa come dualità e le soluzioni cosmologiche hanno una curiosa interpretazione come billiardi...! *Il tavolo da biliardo è la sottoalgebra di Cartan....*

Cosmologia: l'evoluzione dell'Universo a grande scala

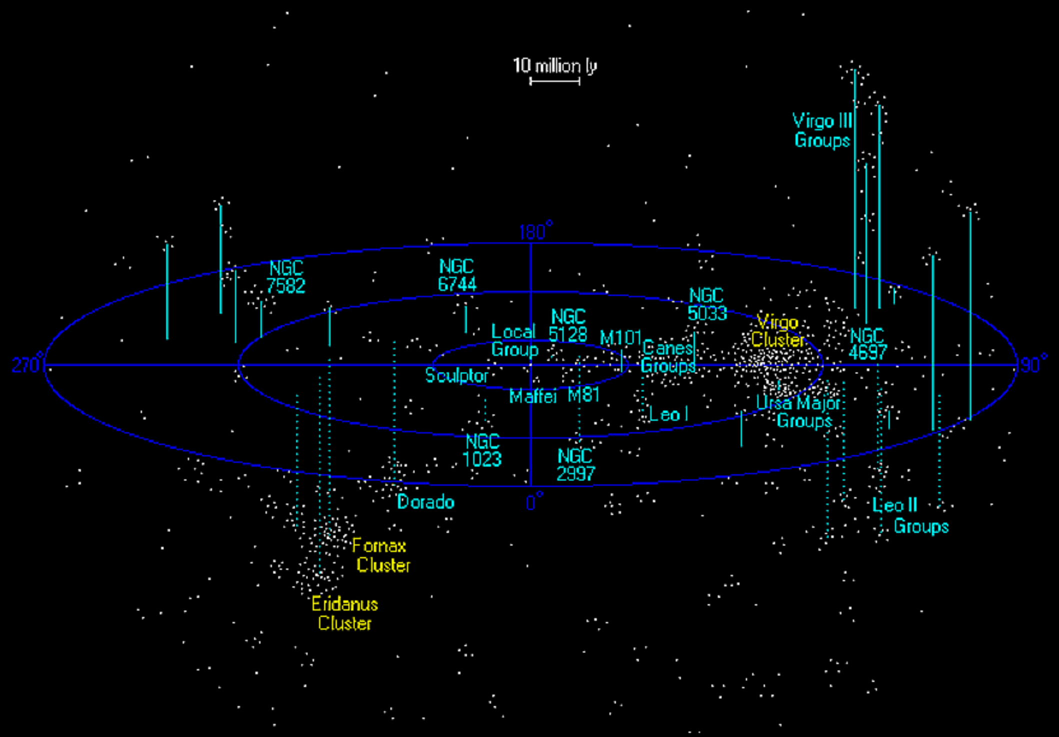


L'Universo appare granulare alle scale più basse.

La Via Lattea

10.000 anni luce

Cosmologia: l'evoluzione dell'Universo a grande scala

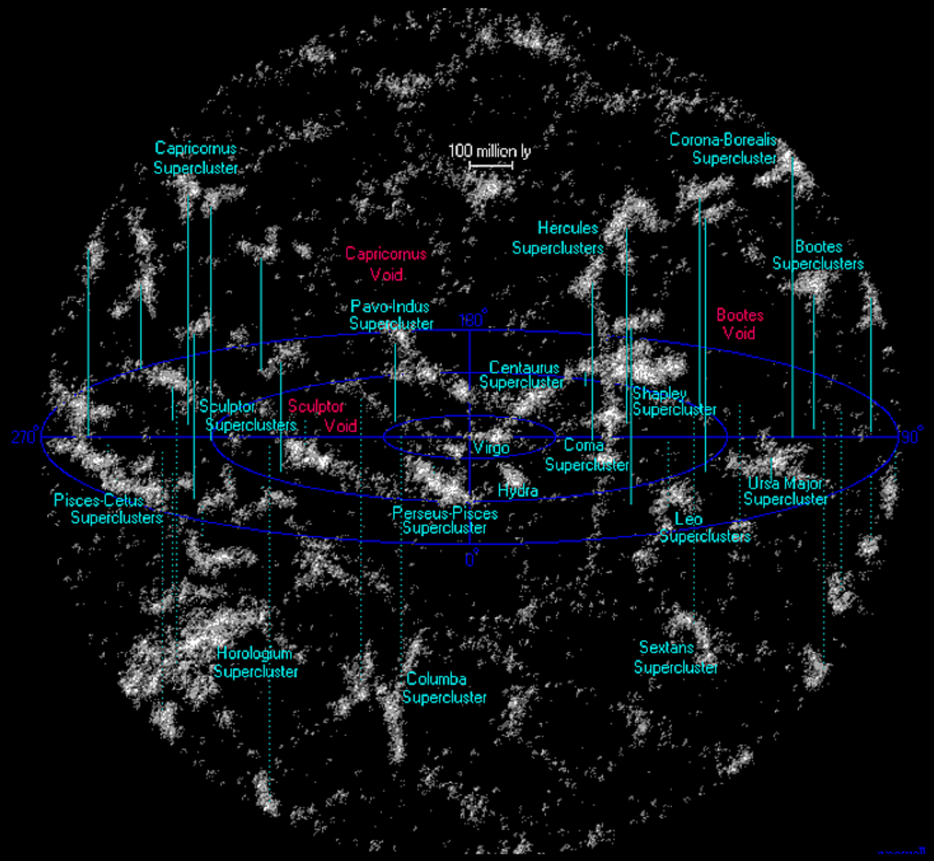


L'Universo appare granulare alle scale più basse.

La Via Lattea 10.000 anni luce

10 milioni di anni luce

Cosmologia: l'evoluzione dell'Universo a grande scala



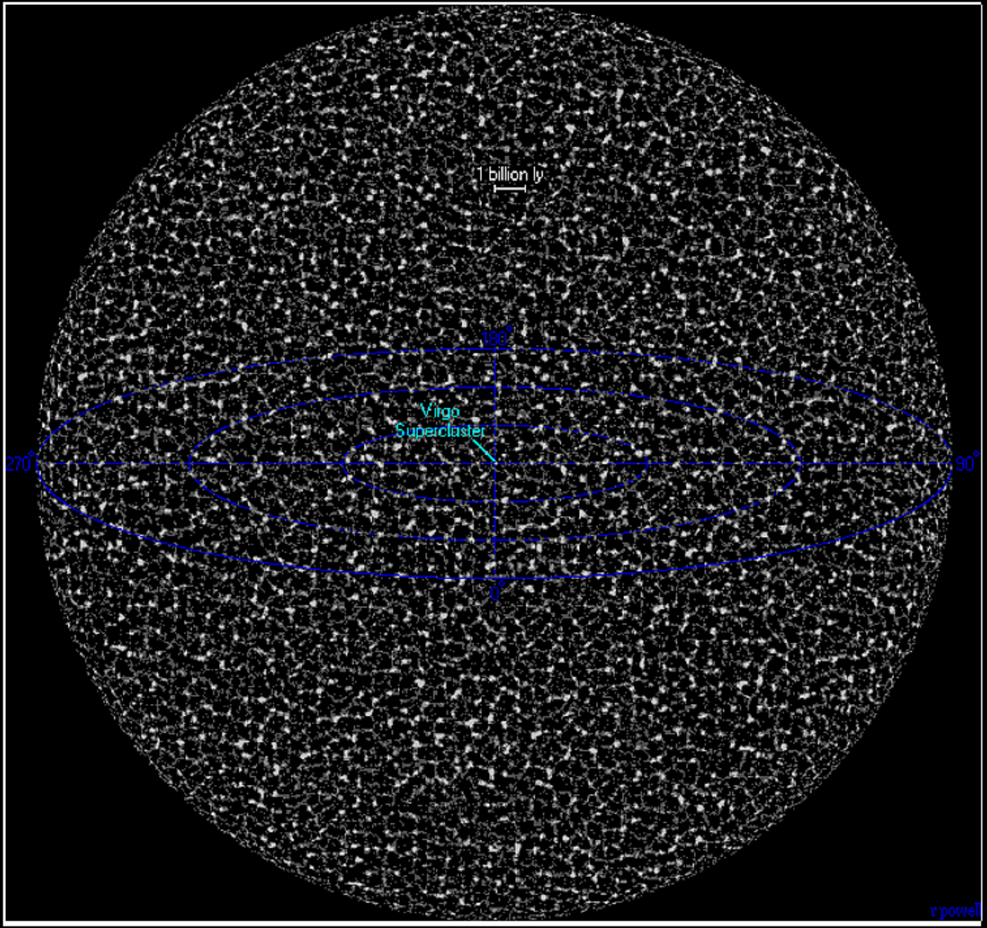
L'Universo appare granulare alle scale più basse.

La Via Lattea 10.000 anni luce

10 milioni di anni luce

100 milioni di anni luce

Cosmologia: l'evoluzione dell'Universo a grande scala



L'Universo appare granulare alle scale più basse.

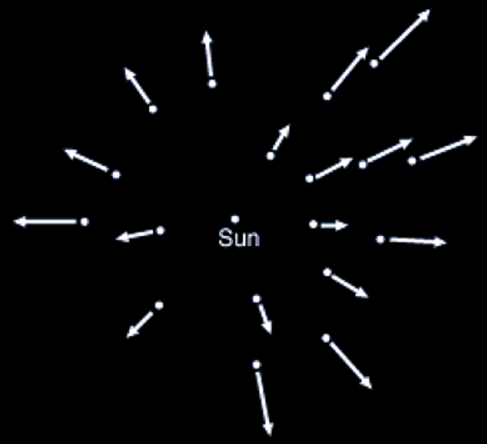
La Via Lattea
10.000 anni luce

10 milioni di anni luce

100 milioni di anni luce

Ma a 10^{28} cm = 1 miliardo di anni luce appare omogeneo

Nel 1929 Hubble scopre la recessione universale delle Galassie



Le Galassie si allontano tutte radialmente da noi (dal Sole) e si allontanano tanto più velocemente, quanto più sono lontane.

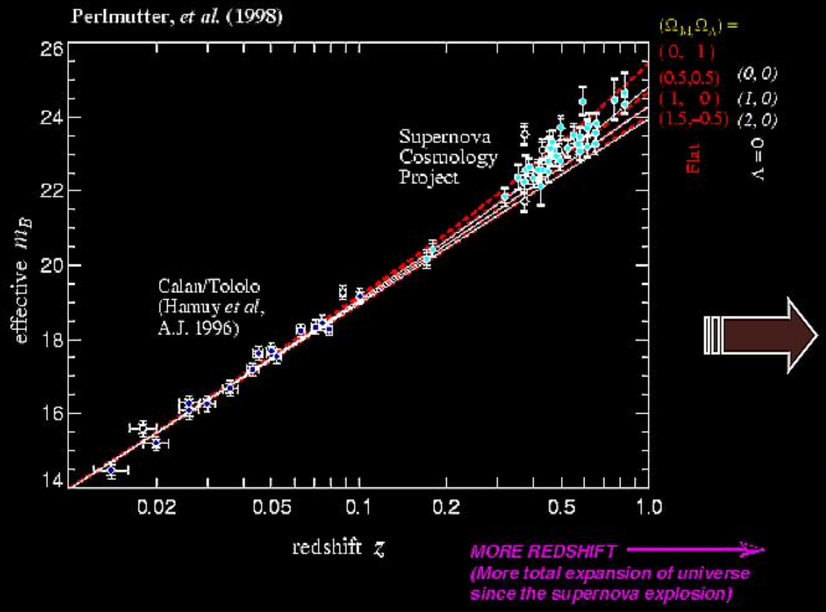
$$v = H_0 d$$

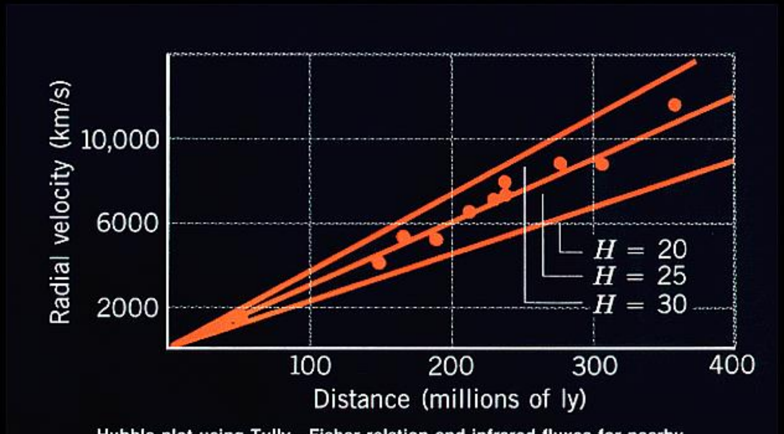
Velocità di recessione

Costante di Hubble

Distanza

La legge di Hubble si verifica attraverso la misura del ***redshift***





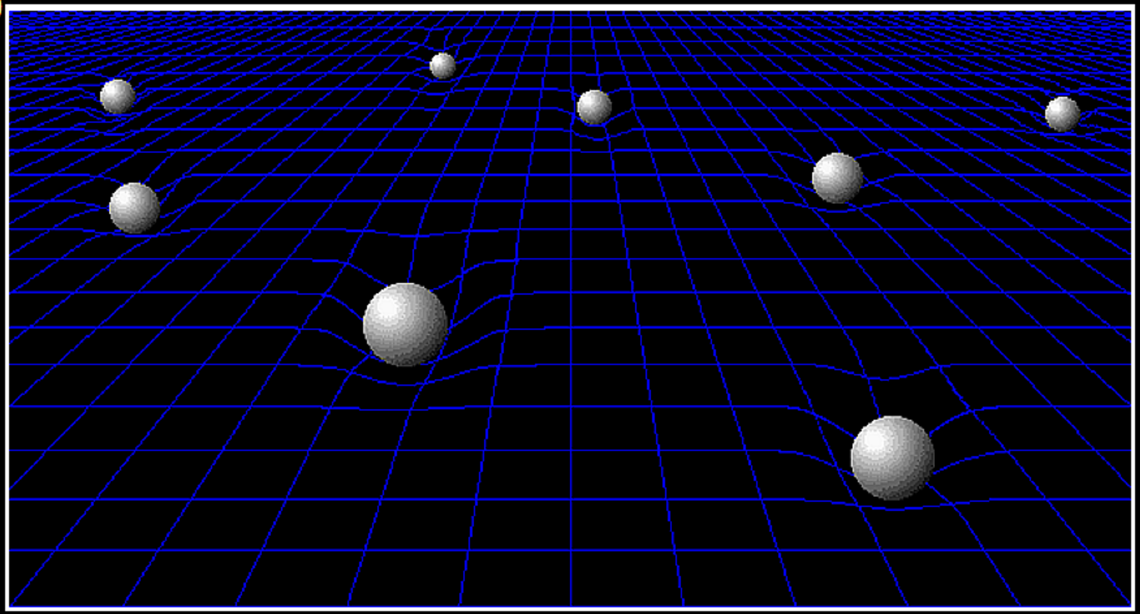
Hubble plot using Tully – Fisher relation and infrared fluxes for nearby calibrating galaxies to estimate the distances to eleven clusters of galaxies.

Le righe spettrali delle galassie lontane appaiono spostate verso il rosso

$$z = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0}$$

Come capire la legge di Hubble?

- Risposta: L'Universo si espande!
- Andando a ritroso nel tempo torniamo ad un istante in cui l'Universo era piccolissimo e tutta la materia era concentrata in una regione infinitesima di spazio. La densità di energia era infinita.



Le galassie sono come palle disposte e su di un telo. Esse sono ferme ma è il telo che si dilata.

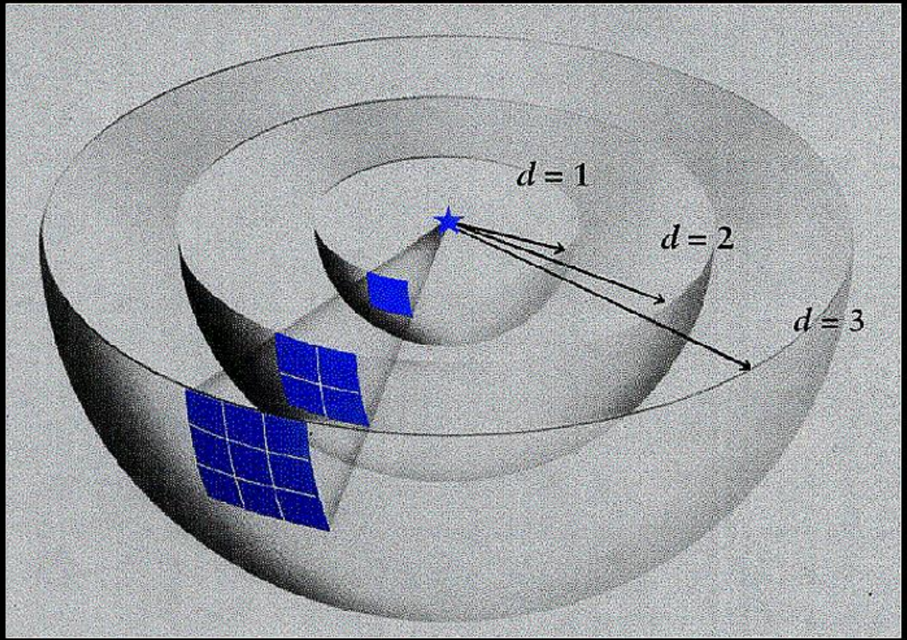
a velocità maggiore di quella della luce...

Candele standard e legge di Gauss

In cosmologia noi osserviamo l'universo che ci circonda **ricevendo la radiazione** inviataci da sorgenti lontane (luce visibile, raggi X, onde radio, neutrini, un giorno anche onde gravitazionali. Misuriamo le distanze grazie alle **candele standard.**
Se sappiamo quando é luminosa una sorgente, deduciamo la sua **distanza** dalla sua **luminosità apparente**.

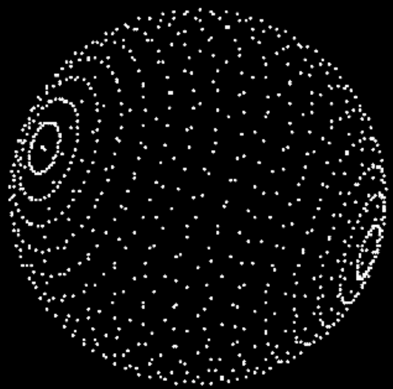
Alla base di questo metodo c'é la legge di Gauss che asserisce che il flusso attraverso ogni sfera attorno alla sorgente è costante.

$$\ell_{apparente} = \frac{\ell_{assoluta}}{r^2}$$

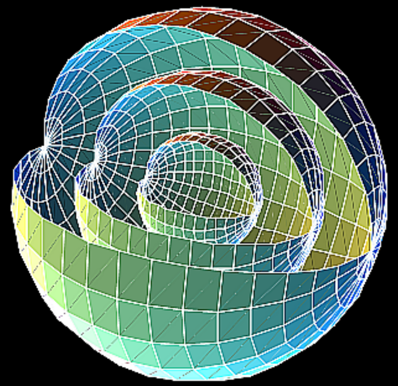


La diluizione dell'intensità con la distanza presuppone una geometria a simmetria sferica: **isotropia!!!**

Immaginate la superficie di una sfera



I puntini sulla superficie rappresentano le galassie.
se la sfera si espande



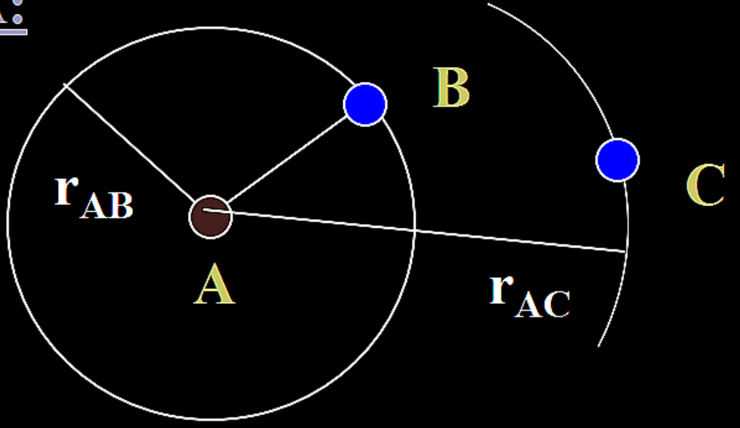
ogni puntino si troverà
più distante da ogni altro puntino
di quanto esso lo fosse l'istante precedente

FATTORE di SCALA:

Le distanze sono funzioni del tempo

$$d_{AB} = \boxed{a(t)}\, r_{AB}$$

$$d_{AC} = \boxed{a(t)}\, r_{AC}$$



La velocità é.....la derivata della distanza rispetto al tempo

$$v(t) = \frac{d}{dt}d(t) = \dot{a}(t)\, r$$

quindi

$$\boxed{H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}}$$

$$v(t) = \boxed{\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}}\, d(t)$$

La costante di Hubble è in realtà una funzione del tempo

$$H_0 = H(t_0)$$ **è il suo valore al tempo attuale**

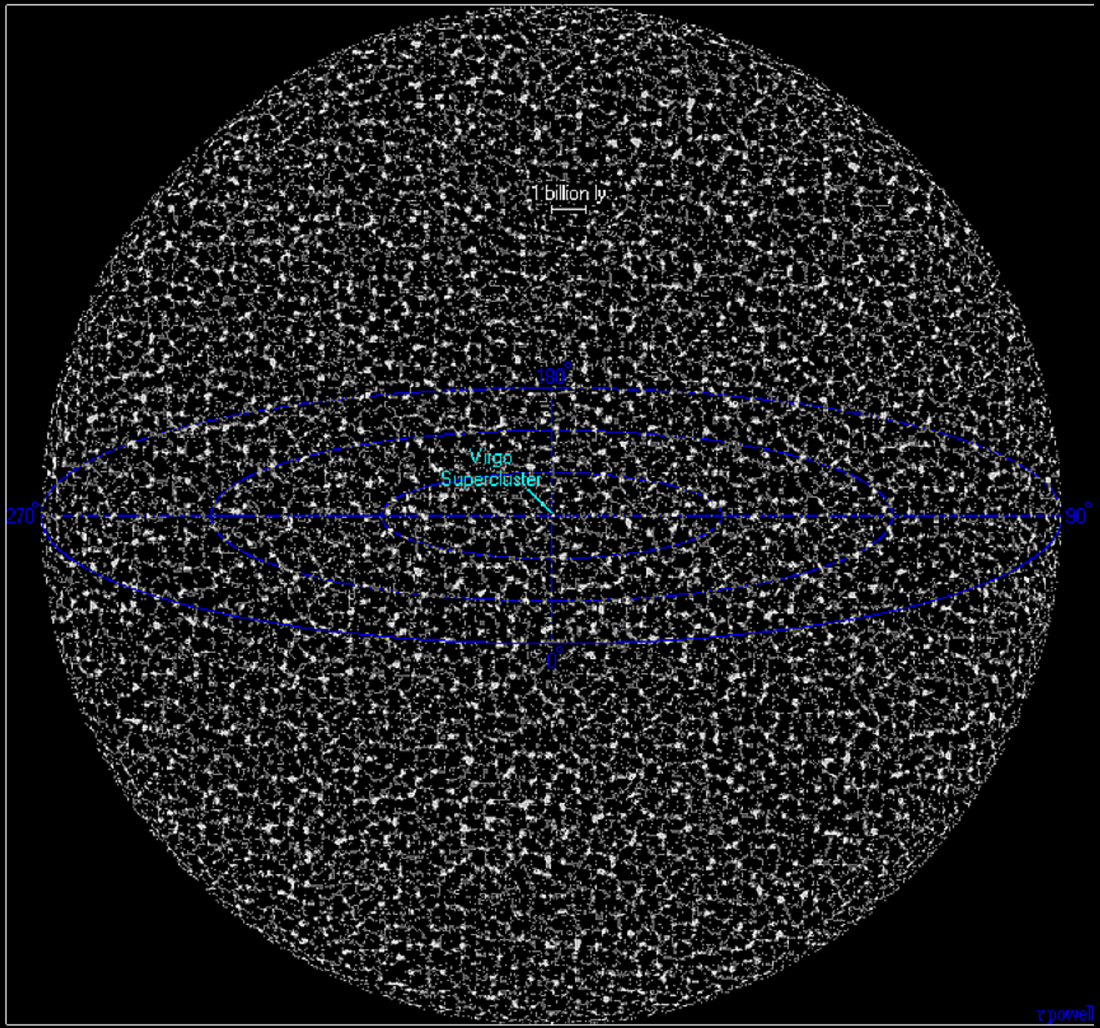
IL NOSTRO UNIVERSO STA ACCELERANDO

Il Principio Cosmologico

Il Principio cosmologico impone **l'omogenità** e **l'isotropia** dello spazio tempo a grandi scale

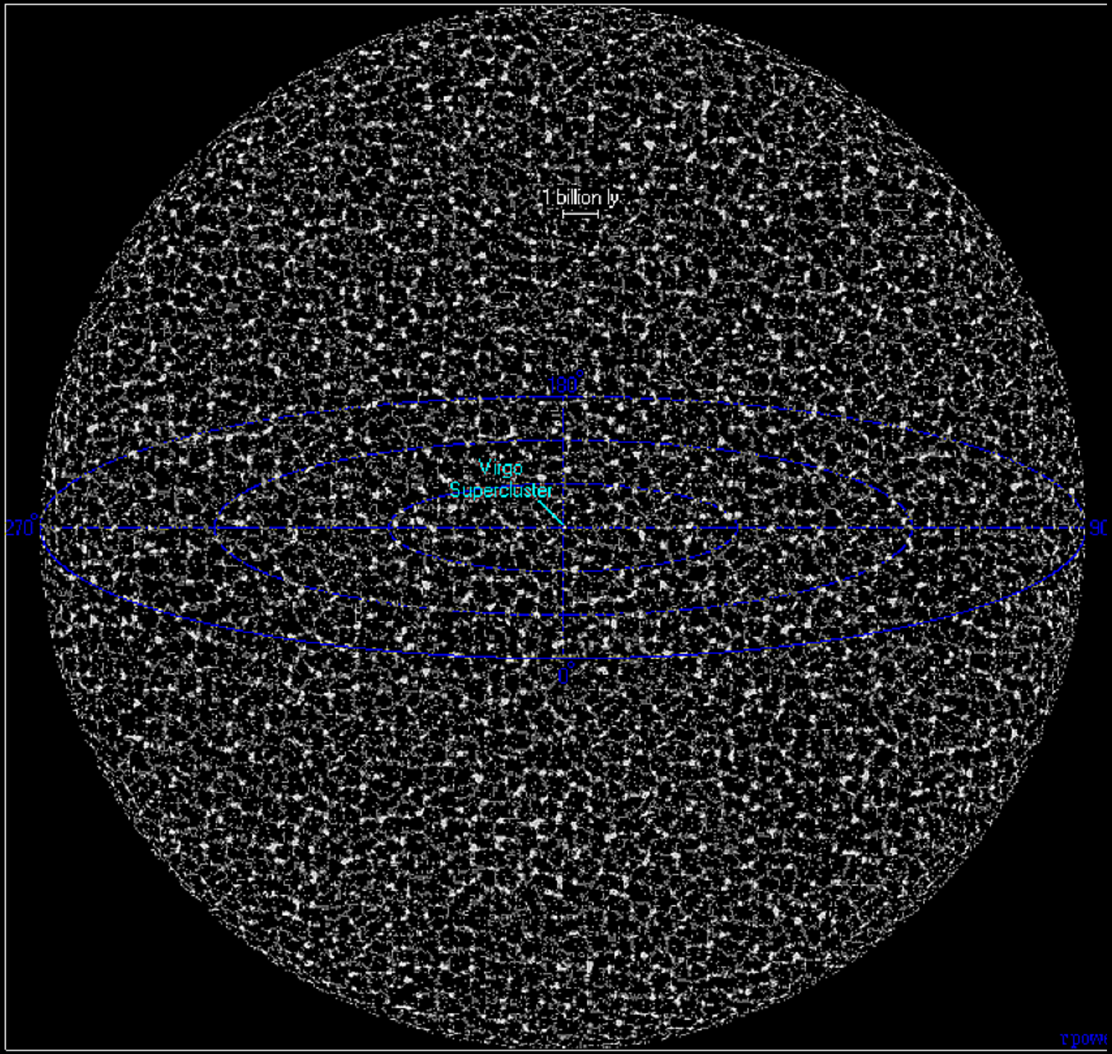
Isotropia vuol dire invarianza per rotazioni.

In qualunque direzione puntiamo il nostro telescopio, dobbiamo vedere approssimativamente lo stesso panorama.....



Il Principio Cosmologico

Il Principio cosmologico impone **l'omogenità** e **l'isotropia** dello spazio tempo a grandi scale

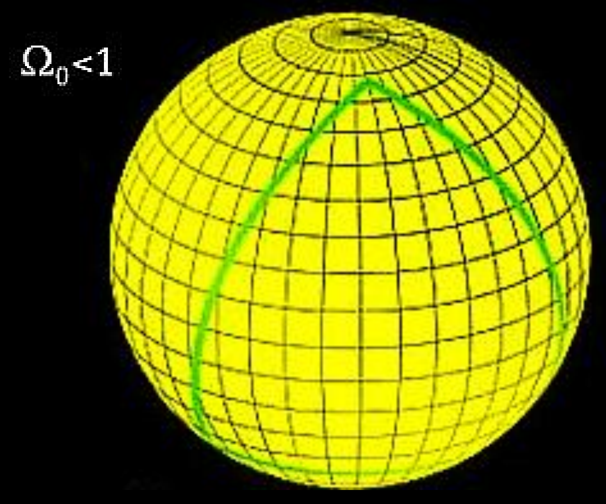


Omogeneità vuol dire invarianza per traslazioni.

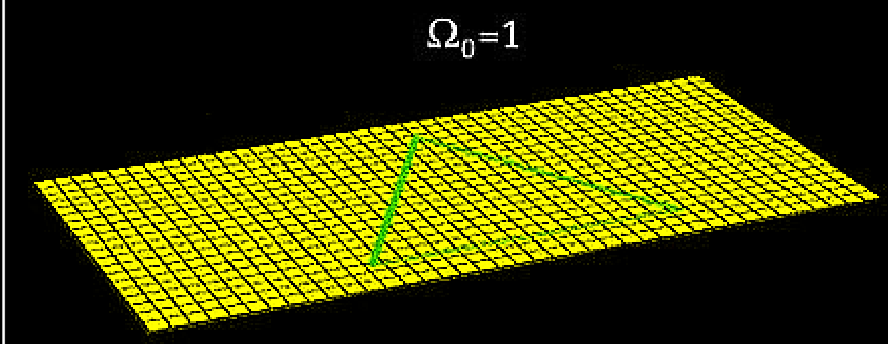
Ciò che vediamo noi dalla nostra galassia deve essere lo stesso panorama che vede un qualunque altro osservatore su qualunque altra galassia anche lontanissima

Espansione dell'Universo

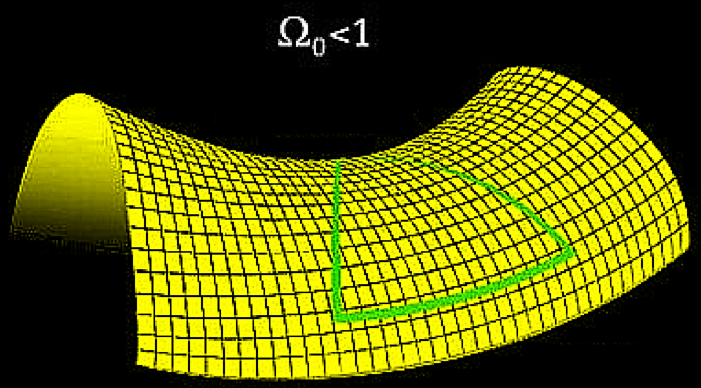
L'Universo può avere tre diverse geometrie nelle sue sezioni a tempo costante, ma in ogni caso si espande. L'espansione è semplicemente una dilatazione dello spazio tridimensionale



Universo sferico (k=1)



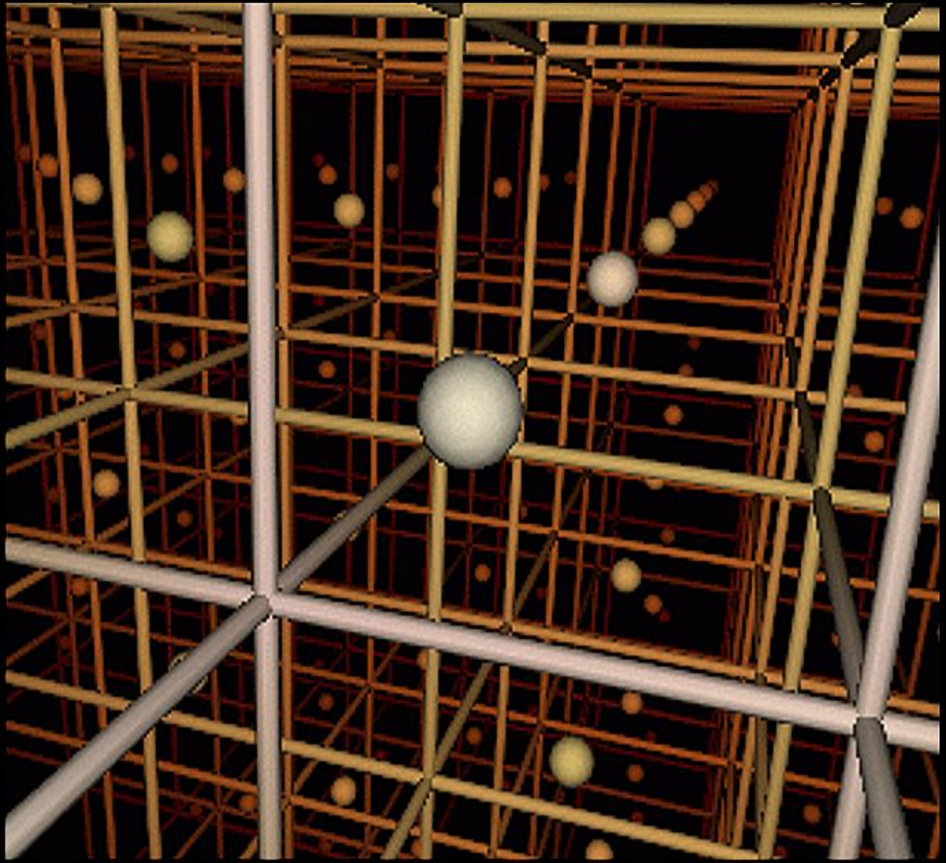
Universo Piatto (k=0)



Universo iperbolico (k= - 1)

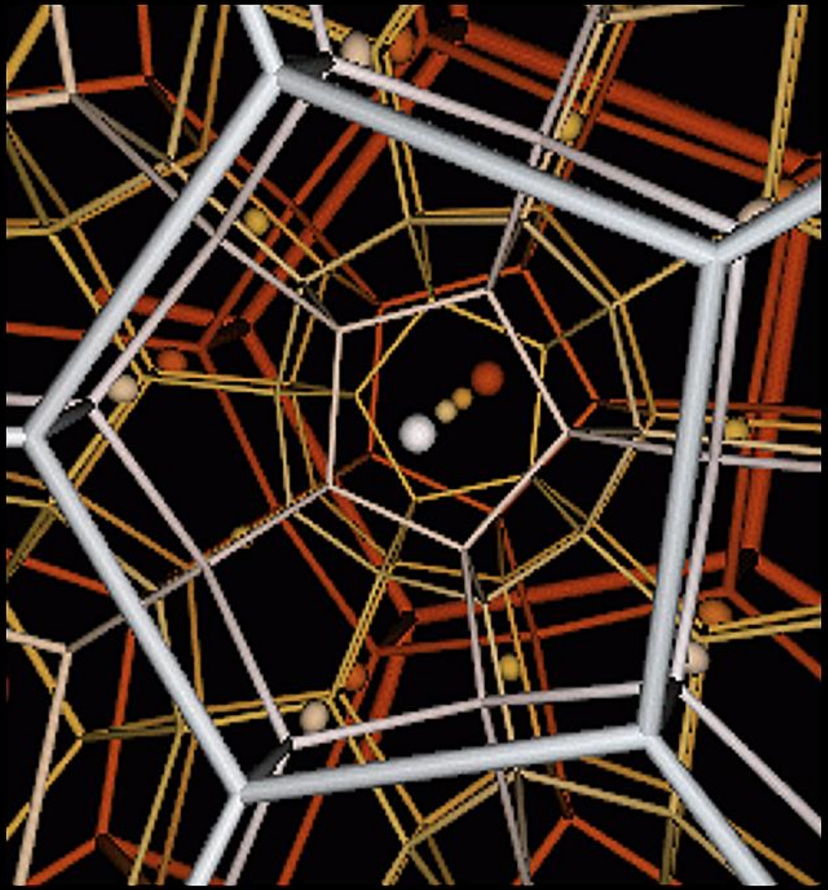
L’Universo piatto

- Nella geometria euclidea lo spazio è diviso in cubi ed un osservatore ha la sensazione dell’ordinaria, familiare prospettiva: l’apparente dimensione angolare degli oggetti è inversamente proporzionale alla loro distanza



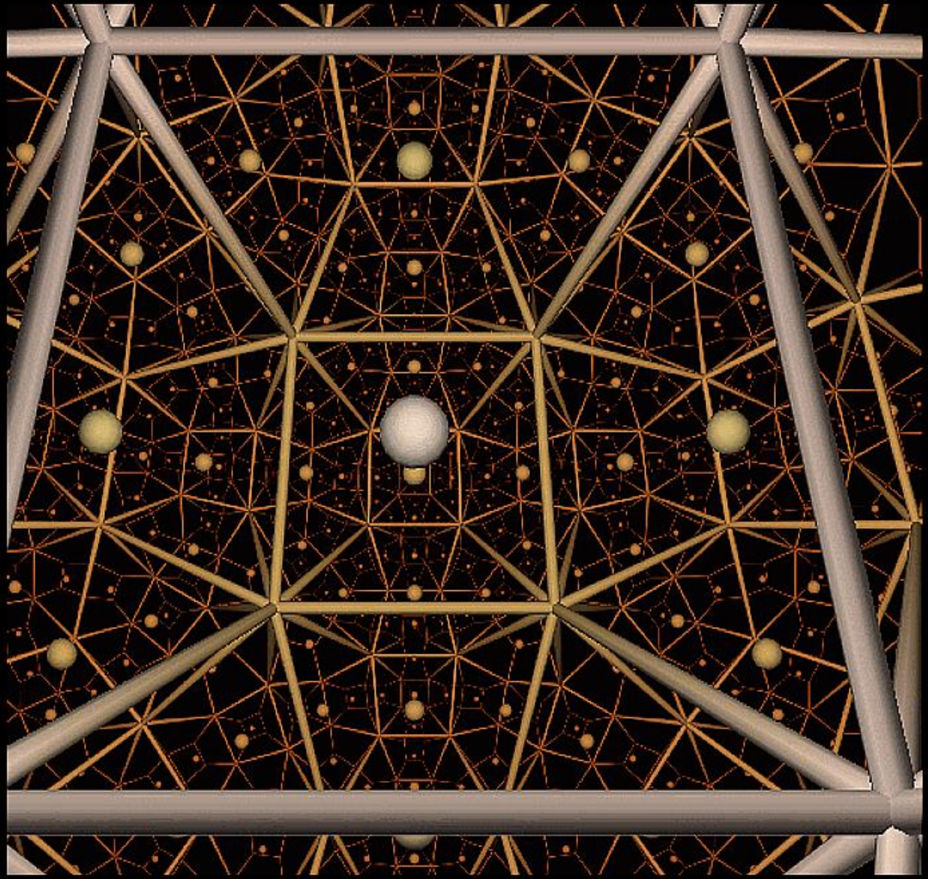
L’Universo sferico

- **Lo spazio sferico mostrato qui é tessellato da dodecaedri regolari. La geometria dell spazio sferico è simile a quella della superficie della Terra. Siamo su una sfera tridimensionale anziché bidimensionale. La prospettiva in uno spazio sferico é peculiare. Oggetti sempre più lontani dapprima diventano più piccoli in dimensione angolare, ma raggiunta una dimensione minima crescono di nuovo in dimensione apparente al crescere della loro distanza. Questo é dovuto alla focalizzazione dei raggi luminosi**

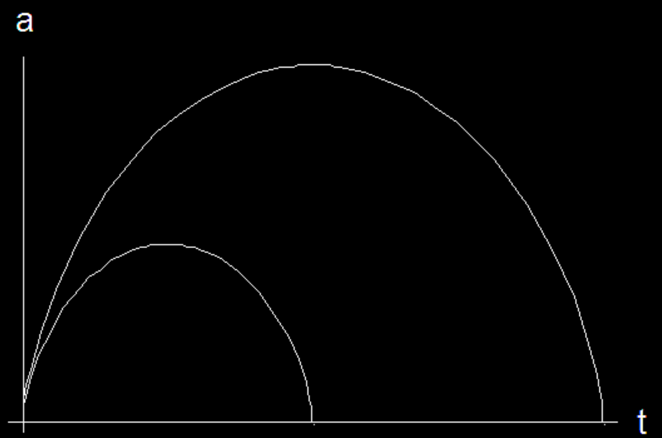


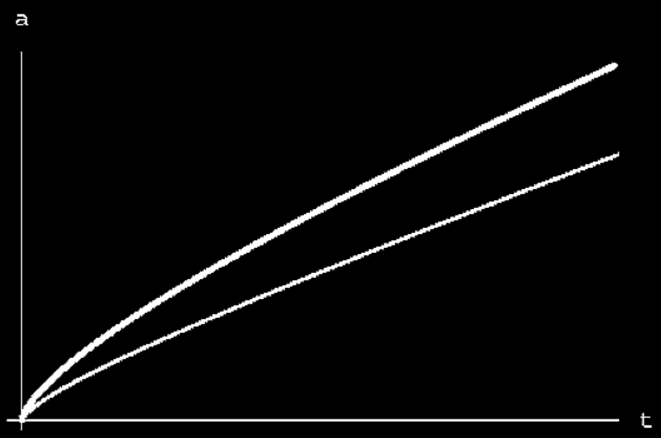
L’Universo iperbolico

- **Lo spazio iperbolico mostrato qui è tessellato di dodecaedri regolari, cosa impossibile nello spazio Euclideo. La taglia delle celle é dell’ordine di grandezza della curvatura. Per oggetti vicini la prospettiva nello spazio iperbolico é molto simile a quella dello spazio Euclideo, ma la dimensione angolare apparente decresce molto più rapidamente con la distanza. Infatti decresce in <u>modo esponenziale.</u>**



L'evoluzione del raggio di curvatura con il tempo cosmico





Universo chiuso di curvatura positiva

$$k = 1$$

Universo aperto di curvatura negativa o nulla

$$k = \begin{cases} 0 \\ -1 \end{cases}$$

Chi lo dice?

- Lo dice un'equazione differenziale, l'equazione di **Freedman:**

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{C}{a^3} - \frac{k}{a^2}$$ **per la materia**

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{C}{a^4} - \frac{k}{a^2}$$ **per la radiazione**

- **Da dove nasce l'equazione di Freedman?**
- **Dalla Relatività Generale. E' l'equazione di Einstein per il fattore di scala a(t) !!**

l'equazione di **Freedman:**

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) d\ell^2$$

Metrica di Robertson-Walker

Fattore di scala

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right) + \frac{\Lambda c^2}{3}$$

F = ma

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda c^2}{3} - \frac{\kappa c^2}{a^2}$$

E = const.

M = const.

$$\dot{\rho} = -3\frac{\dot{a}}{a}\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right)$$

ρ = densita' di energia

P = pressione

$H_0 = \frac{\dot{a}_0}{a_0}$ costante di Hubble

$q_0 = -\frac{\ddot{a}_0 a_0}{\dot{a}_0^2}$ parametro di decelerazione

$\Omega_0 = \frac{\rho_0}{\rho_{0c}} \equiv \frac{8\pi G \rho_0}{3H_0^2}$ parametro di densita'

Λ costante cosmologica

parametri cosmologici

La Relatività Generale

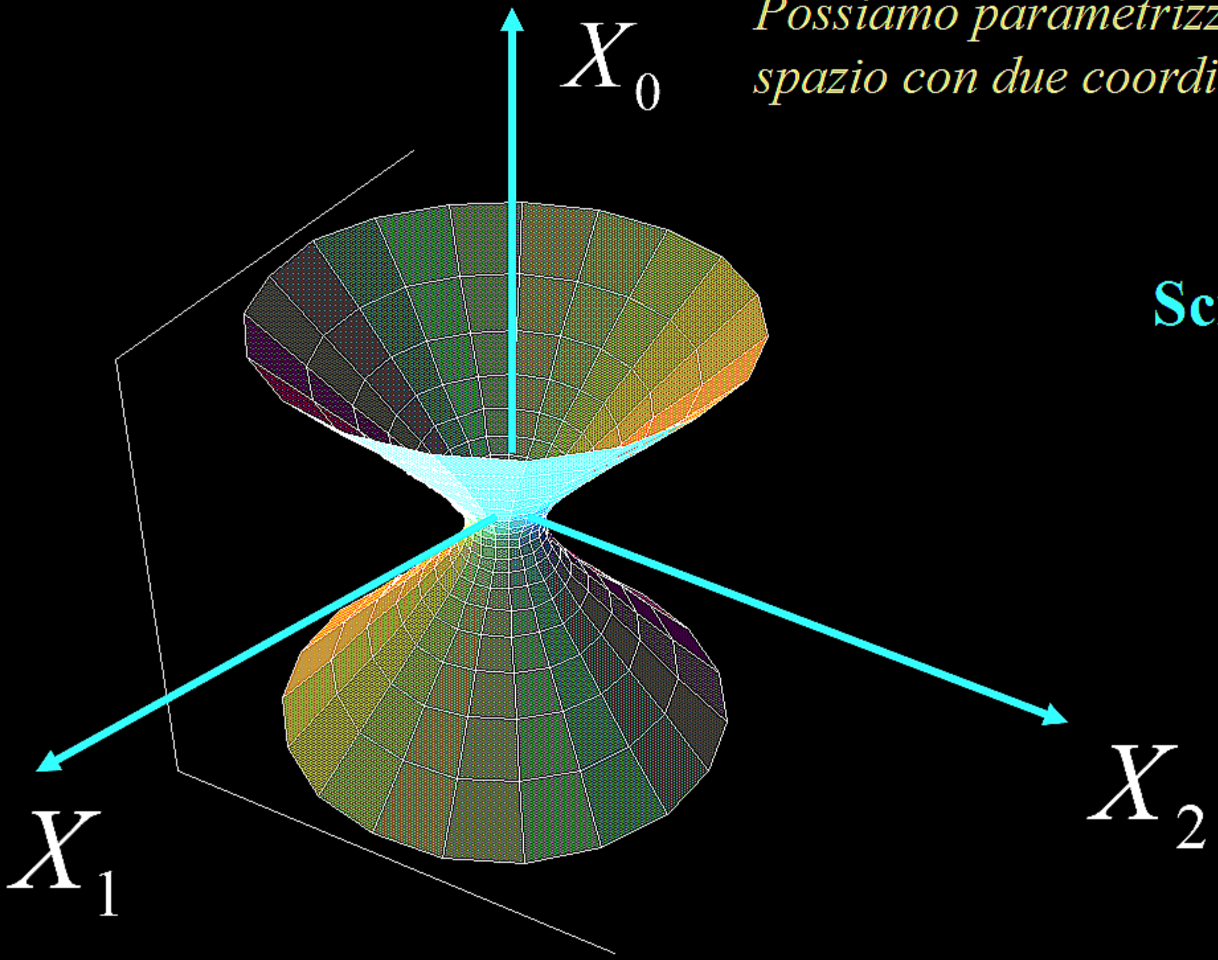
Le equazioni di Einstein determinano la metrica dello spazio-tempo

Cosa è una metrica?

iniziamo con uno spazio-tempo curvo...

*Un esempio di spazio curvo in 2 dimensioni è fornito dall'***iperboloide***. I punti di questa superficie sono tutti quelli che soddisfano la seguente equazione quadratica*

$$X_0^2 - X_1^2 - X_2^2 = -1$$



Possiamo parametrizzare tutti i punti di questo spazio con due coordinate:

$$-\infty < a < \infty$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Scrivendo:

$$X_0 = \mathrm{Sinh}\, a$$

$$X_1 = \mathrm{Cosh}\, a \,\mathrm{Cos}\,\theta$$

$$X_2 = \mathrm{Cosh}\, a \,\mathrm{Sin}\,\theta$$

La metrica: una regola per calcolare la lunghezza delle curve!!

Una curva sulla superficie è descritta dando le coordinate come funzioni di un solo parametro t

Quanto è lunga questa curva?

$$a = a(t)$$
$$\theta = \theta(t)$$

$$X_0(t) = \mathrm{Sinh}\, a(t)$$
$$X_1(t) = \mathrm{Cosh}\, a(t)\, \mathrm{Cos}\, \theta(t)$$
$$X_2(t) = \mathrm{Cosh}\, a(t)\, \mathrm{Sin}\, \theta(t)$$

$$\boxed{\ell_{AB} = \int \sqrt{\left(\frac{dX_0}{dt}\right)^2 - \left(\frac{dX_1}{dt}\right)^2 - \left(\frac{dX_2}{dt}\right)^2}\, dt}$$

*Questo integrale è una regola ! Ogni regola di questo tipo è un **Campo Gravitazionale!!!!***

La metrica: una regola per

In un campo gravitazionale le particelle si muovono lungo le geodetiche definite dalla metrica. Le geodetiche sono le linee più diritte possibili in quella geometria ed hanno lunghezza minima

(= estremale)

$$\boxed{\ell_{AB} = \int \sqrt{\left(\frac{dX_0}{dt}\right)^2 - \left(\frac{dX_1}{dt}\right)^2 - \left(\frac{dX_2}{dt}\right)^2}\, dt}$$

*Questo integrale è una regola ! Ogni regola di questo tipo è un **Campo Gravitazionale!!!!***

Vediamo quali sono le linee dritte (=geodetiche) sull'iperboloide

Tre tipi diversi di curve e quindi di geodetiche

Relatività

= segnatura

di Lorentz - , +

tempo

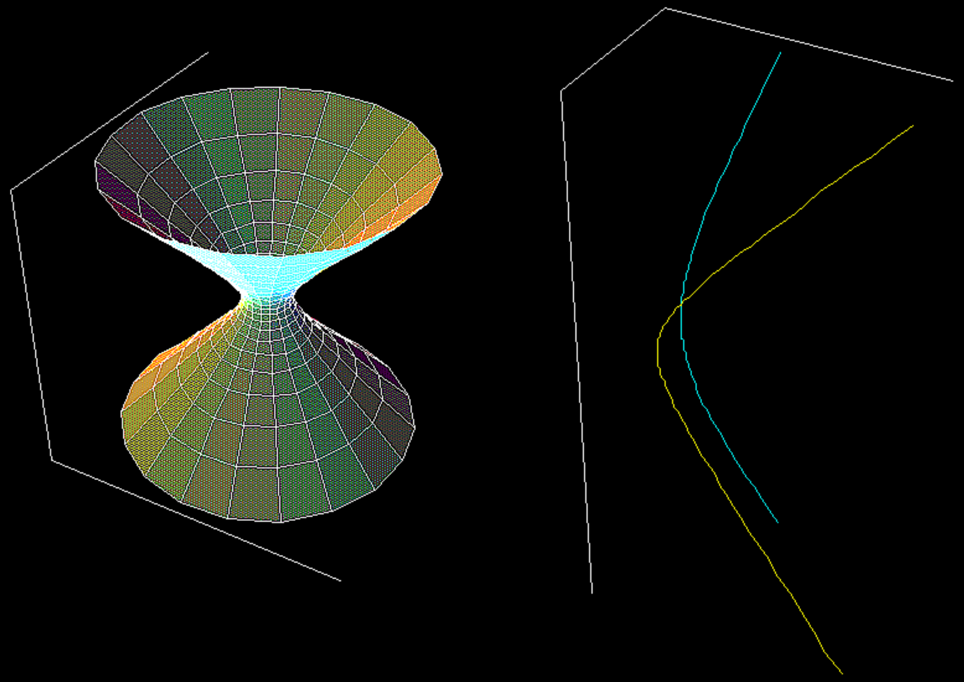
spazio

- ***$dl^2 > 0$*** *geodetica di tipo spazio:non può essere percorsa da nessuna particella (viaggerebbe più veloce della luce)*
- ***$dl^2 < 0$*** *geodetica di tipo tempo. E' una possibile linea di mondo per una particella con massa!*
- ***$dl^2 = 0$*** *geodetica di tipo luce. E' una possibile linea di mondo per i fotoni e le altre particelle di massa nulla*

$$d\ell^2 = \left(\frac{da}{dt}\right)^2 - \cosh^2 a \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

Tipo spazio

$$tg\theta = p\frac{\mathrm{Sinh}\, a}{\sqrt{p^2+\mathrm{Cosh}^2 a}}$$

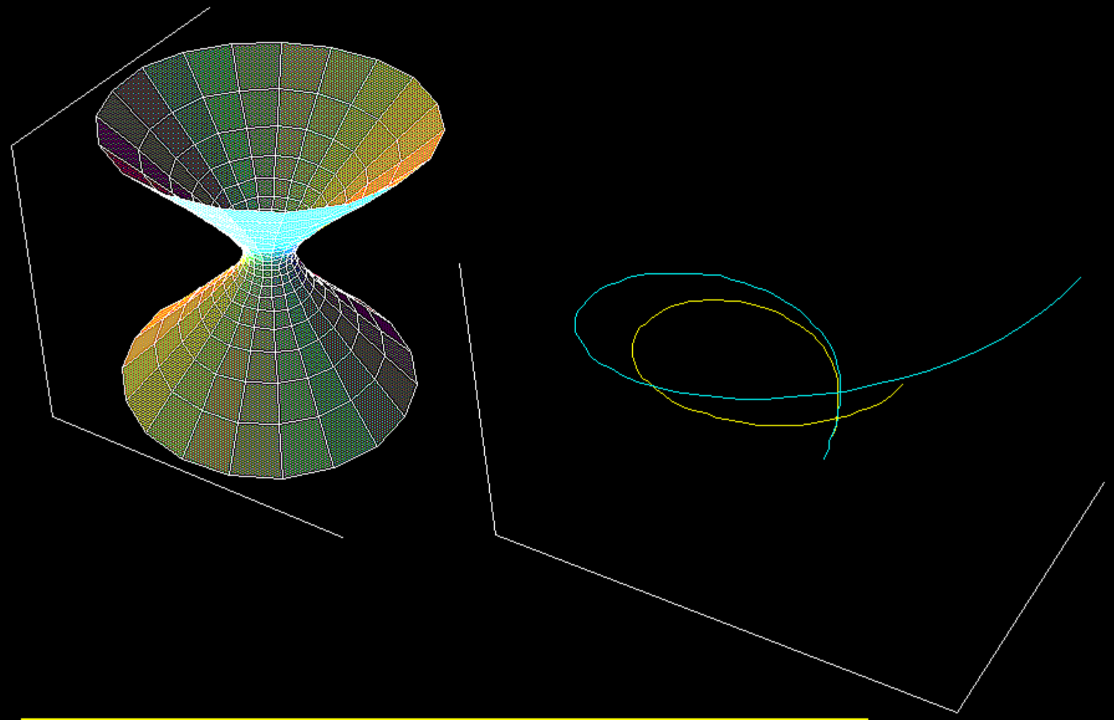


*Queste curve giacciono sull'iperboloide e sono di tipo spazio. Esse si estendono dall'infinità negativa nella falda inferiore all'infinità positiva in quella superiore. Si attorcigliano un po' attorno alla gola ma non fanno mai un giro completo. Sono caratterizzate dalla costante **p=pendenza**.*

La forma delle geodetiche è una conseguenza della metrica, la nostra regola per misurare le lunghezze

Tipo tempo

$$\mathrm{Cosh}\, a = E\sqrt{\frac{E^2 tg^2 \frac{\theta}{E} + 1}{tg^2 \frac{\theta}{E} + 1}}$$

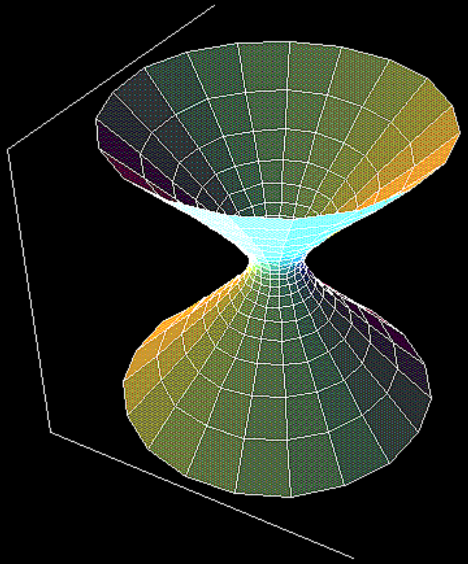


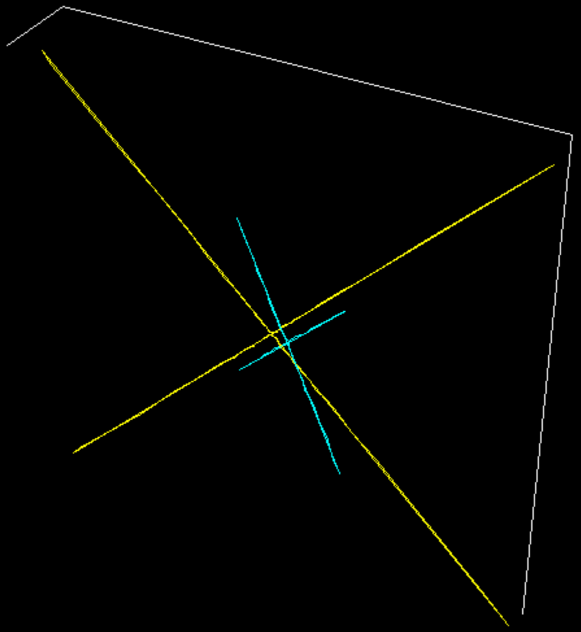
Queste curve giacciono sull'iperboloide e sono di tipo tempo. Esse hanno un'estensione limitata in "altezza " e si attorcigliano completamente attorno alla gola facendo più di un giro completo. Sono caratterizzate dalla costante ***E=energia***

La forma delle geodetiche è una conseguenza della metrica, la nostra regola per misurare le lunghezze

Tipo luce

$$\boxed{\mathrm{Cosh}\, a = \sqrt{\frac{tg^2(\theta+\alpha)+1}{tg^2(\theta+\alpha)-1}}}$$





Queste curve giacciono sull'iperboloide e sono di tipo luce. Esse hanno un'estensione infinita in "altezza " e non si attorcigliano attorno alla gola Sono caratterizzate dalla costante

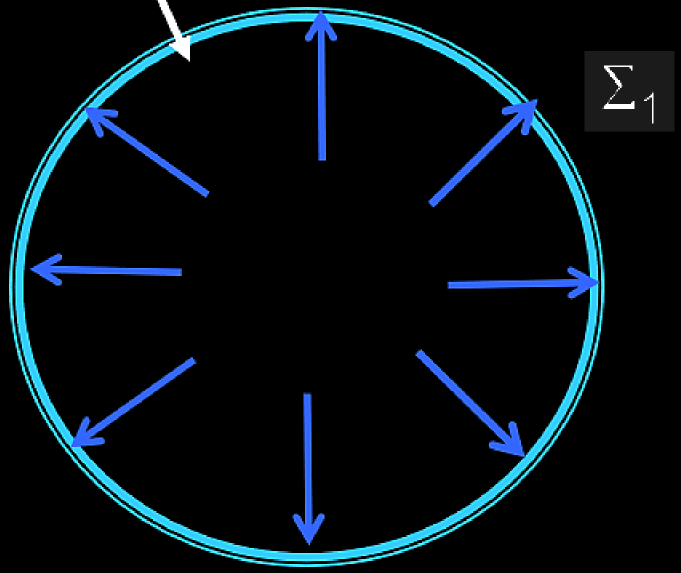
α =energia

La forma delle geodetiche è una conseguenza della metrica, la nostra regola per misurare le lunghezze

Ora che abbiamo visto che cosa sono le geodetiche, possiamo esplorare le proprietà di una metrica, cioè di un campo gravitazionale studiando la forma e l’evoluzione delle sue geodetiche. Ad esempio............

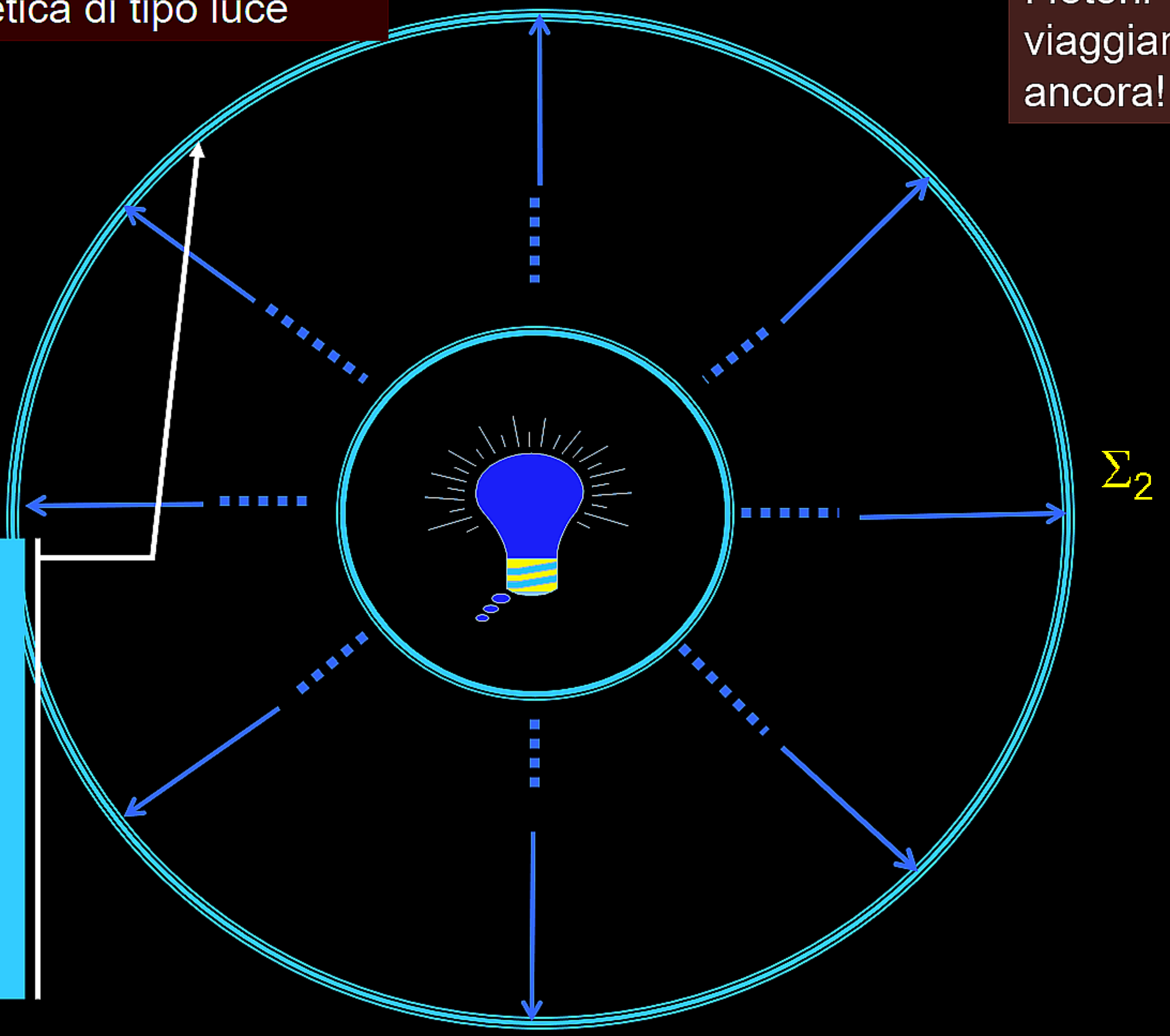
Ogni fotone emesso percorre una geodetica di tipo luce

Al tempo T_1 i fotoni emessi hanno raggiunto una superficie Σ_1



Ogni fotone emesso percorre una geodetica di tipo luce

I fotoni viaggiano ancora!



Al tempo T_2 i fotoni hanno raggiunto una superficie Σ_2

L’espansione dell’Universo si può visualizzare considerando l’evolversi nel tempo della superficie

Σ (t)

Il modello cosmologico standard è isotropo (oltre che omogeneo)

Nel caso dell' Universo piatto, abbiamo, ad esempio:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\left(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2\right)$$

come metrica, cioé come regola per calcolare le distanze. Una geodetica di tipo luce (la traiettoria spazio temporale di un fotone) é pertanto della forma seguente

$$x_i(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{dt}{a(t)} \frac{k_i}{\sqrt{\vec{k}^2}}$$

Dove $\vec{k} = \{k_1, k_2, k_3\}$ **è un vettore costante (l'impulso del fotone)**

Le superfici $\Sigma(t)$ sono sferiche, nella metrica

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\left(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2\right)$$

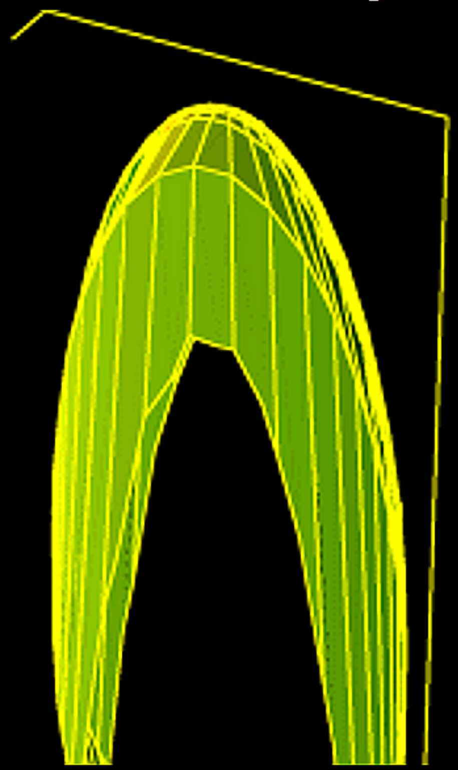
Consideriamo ora una metrica differente, omogenea, ma non necessariamente isotropa

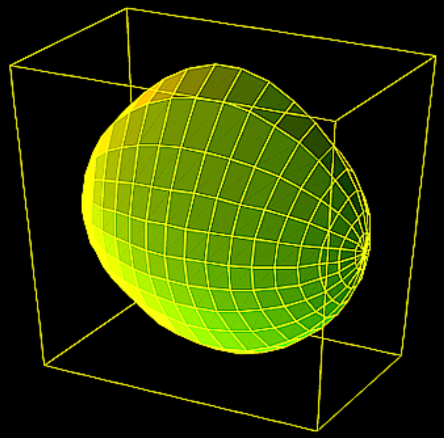
$$ds^2 = - dt^2 + t^{2p_1} dx_1^2 + t^{2p_2} dx_2^2 + t^{2p_3} dx_3^2$$

Se $p_1 = p_2 = p_3 = \frac{2}{3}$ abbiamo la soluzione dell'equazione di Einstein isotropa per un universo pieno di polvere (le galassie)

Ma esistono anche altre soluzioni, anche nel vuoto, cioè in assenza di materia che riempia l'Universo.

Con questa metrica le superfici Σ (t) evolvono in questo modo:

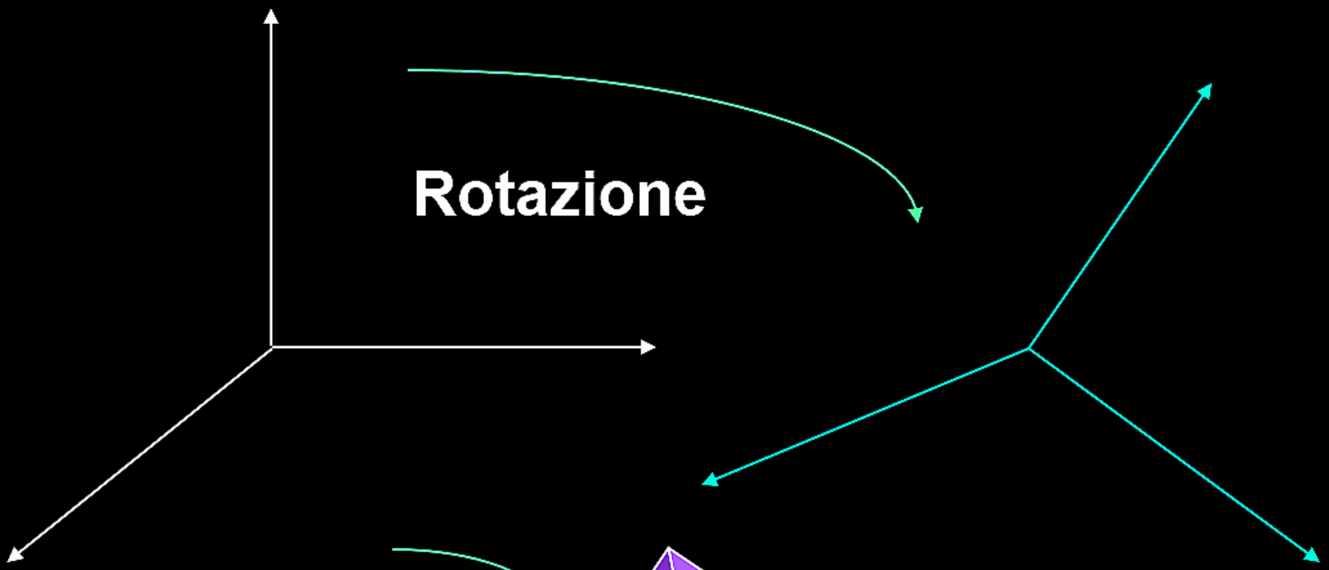


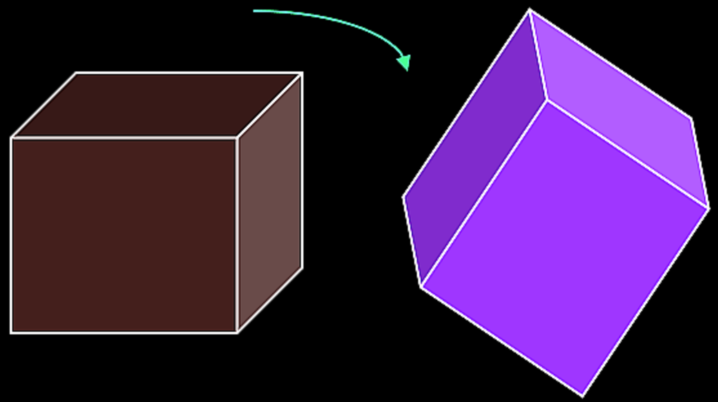


La superficie cambia forma perché alcune dimensioni si espandono più velocemente di altre. In certe soluzioni alcune dimensioni possono addirittura contrarsi

La Teoria delle Stringhe richiede un minimo di conoscenza della Teoria dei Gruppi…

GRUPPO delle ROTAZIONI

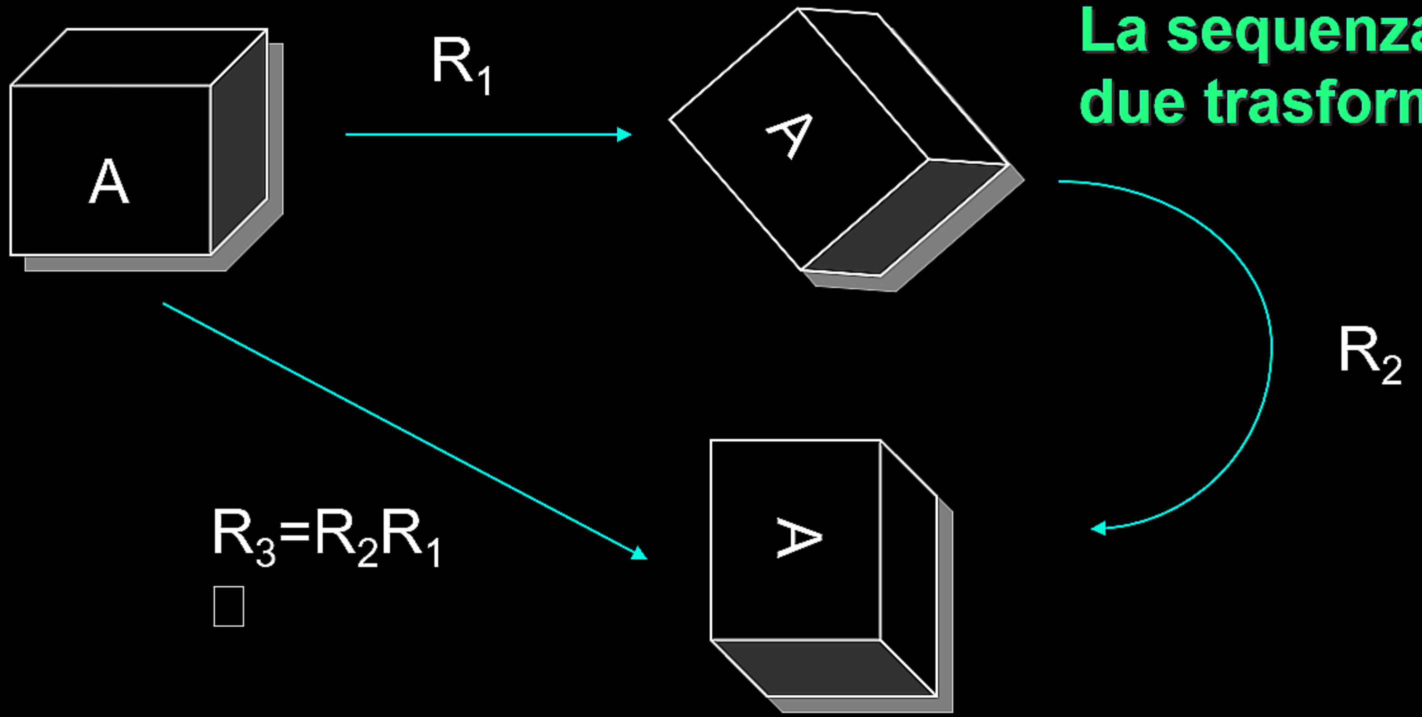




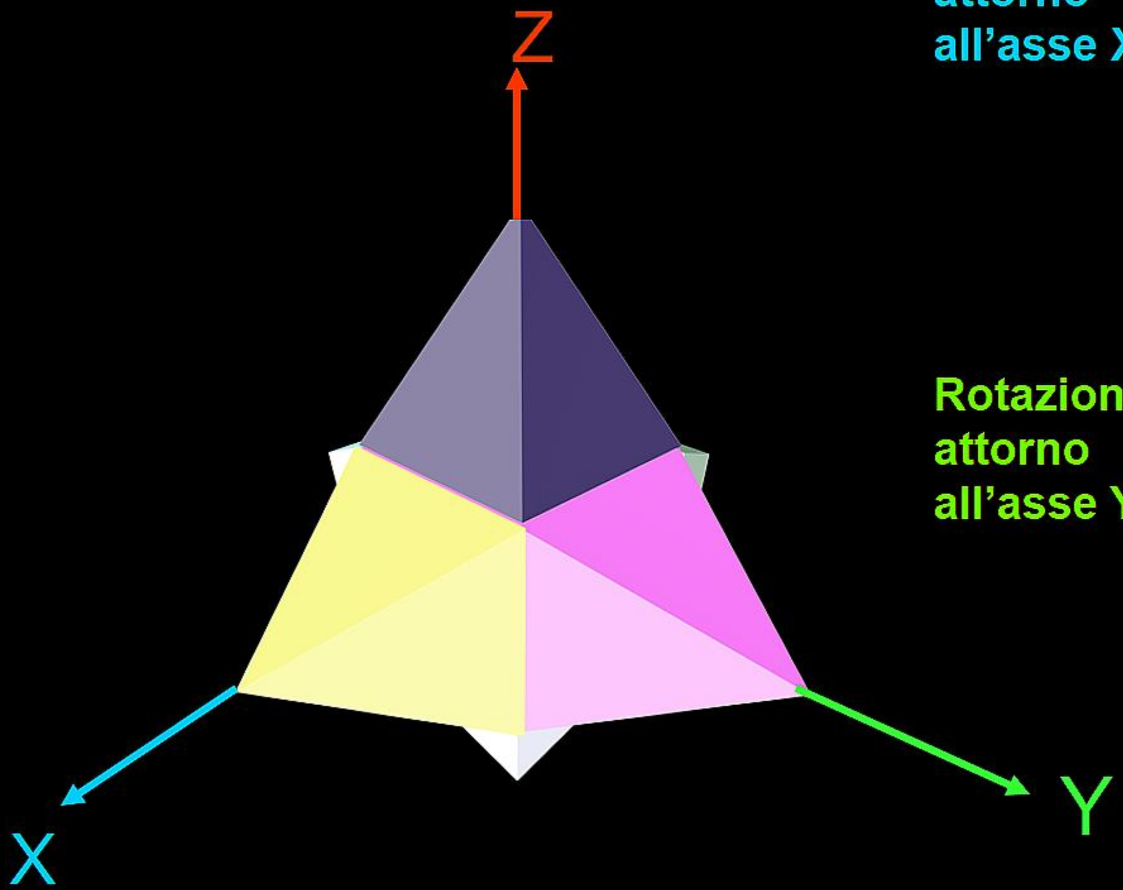
Un gruppo é un insieme i cui elementi sono operazioni di trasformazione che possono essere eseguite in sequenza

Il prodotto di due elementi del gruppo é......

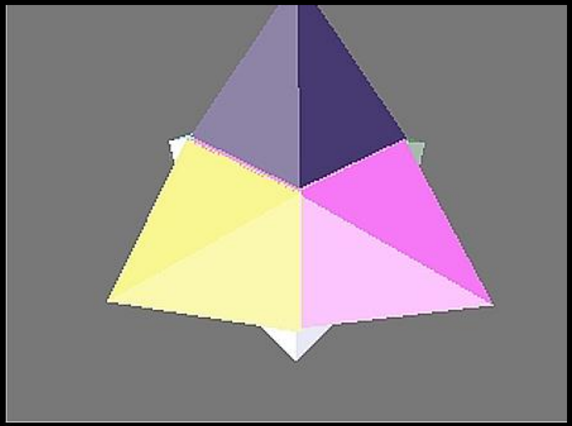
La sequenza delle due trasformazioni:



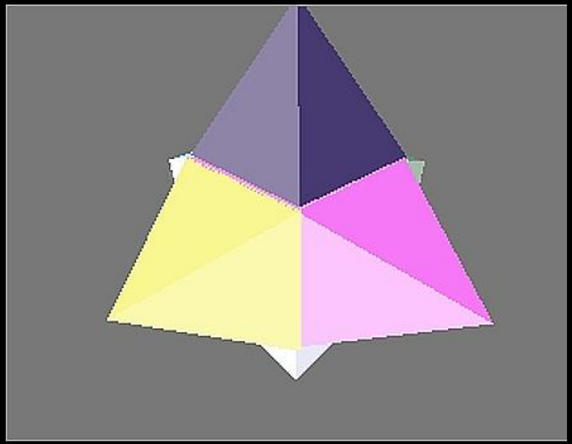
In genere il prodotto non é commutativo



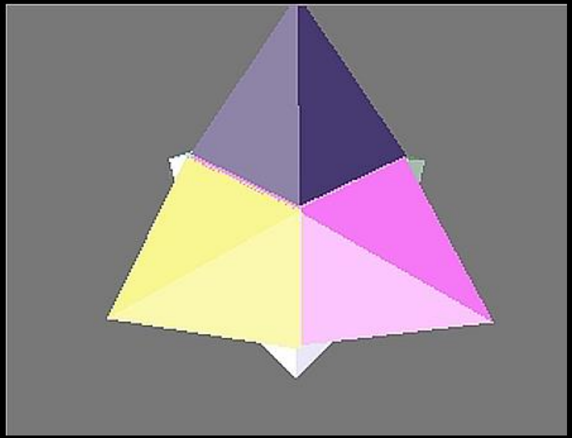
Rotazione
attorno
all'asse X



Rotazione
attorno
all'asse Y



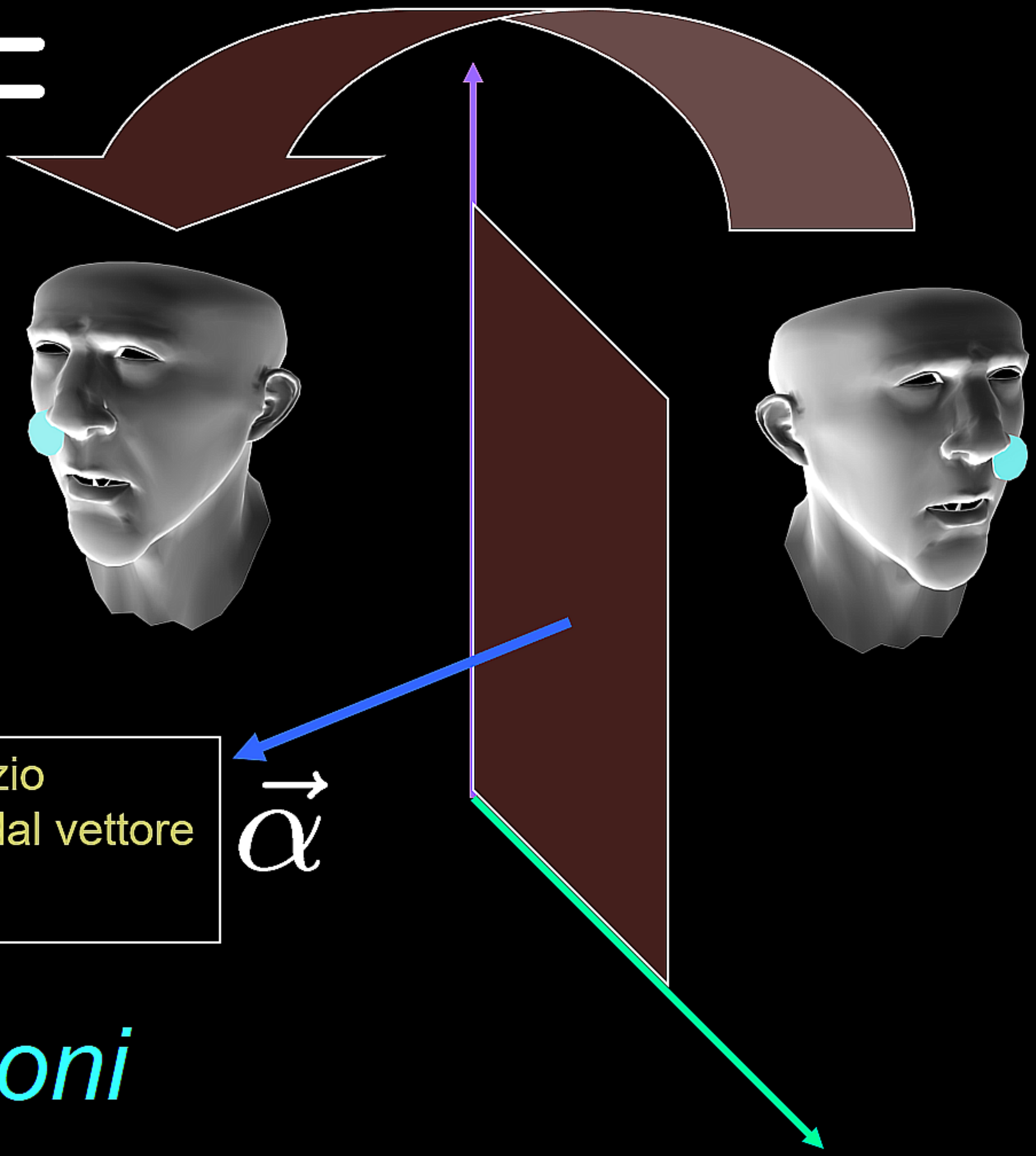
Rotazione
attorno
all'asse Z



Le rotazioni

Le Riflessioni

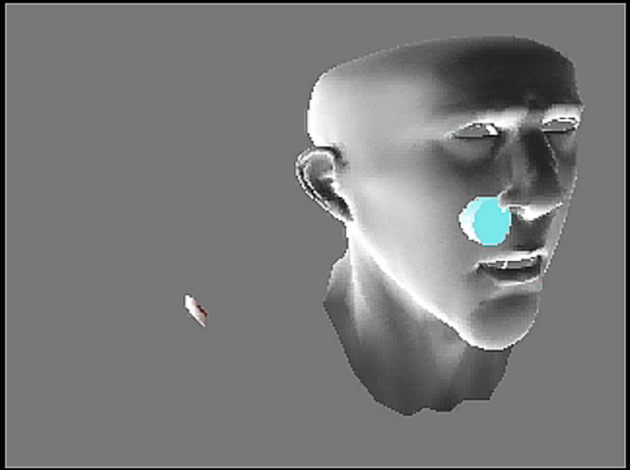
$$\sigma_\alpha =$$

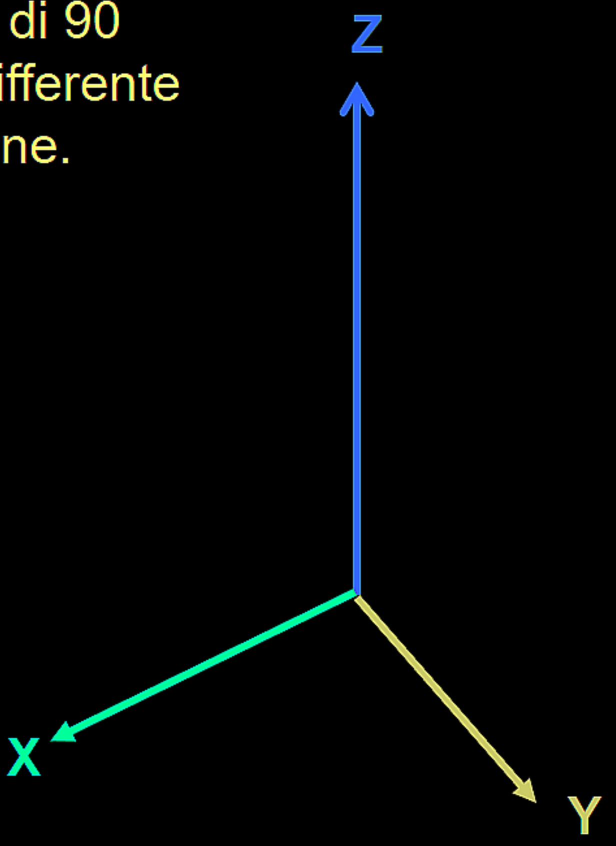


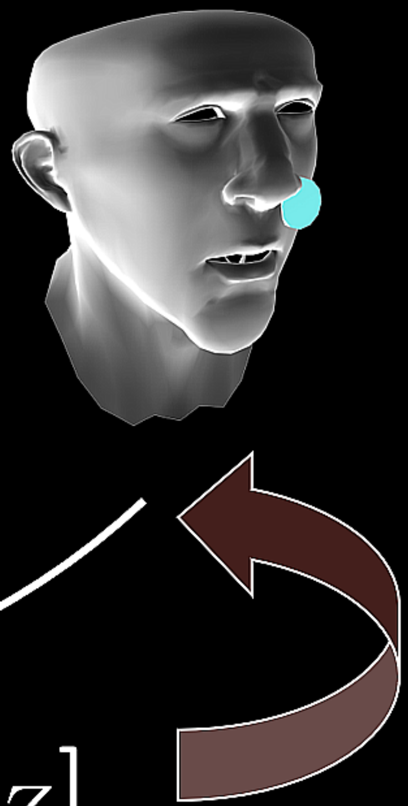
Dato un iperpiano possiamo considerare la riflessione rispetto ad esso

Un iperpiano in un spazio euclideo é identificato dal vettore α ad esso ortogonale

Il risultato di una rotazione di 90
gradi attorno all’asse z è differente
dal risultato di una riflessione.







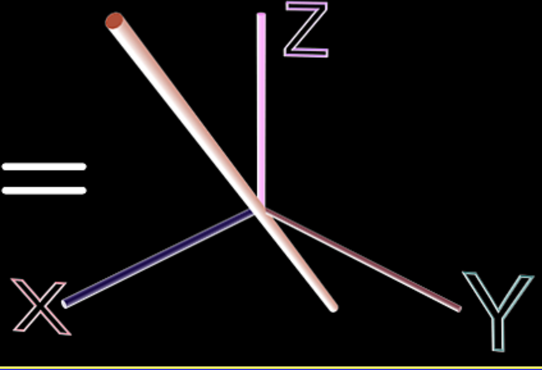
Una rotazione è una trasformazione continua: per questo abbiamo potuto fare un film!!!

$$R_Z[\theta] = \exp[\mathrm{i}\theta\, J_Z]$$

E per questo una rotazione di un angolo θ attorno ad un asse è l’esponenziale di un generatore infinitesimo delle rotazioni attorno a quell’asse!!!

Le matrici di rotazione ed i generatori

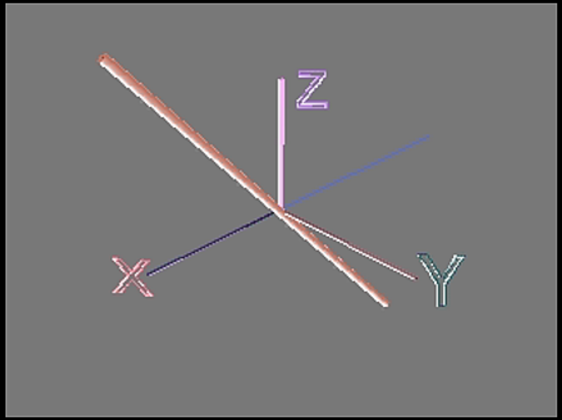
Un vettore é identificato dalle sue componenti lungo gli assi X, Y, Z

$\vec{V} =$ 

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix}$$

Applichiamo una rotazione

$$\exp\left[\mathrm{i}\theta J_Z\right]$$



La rotazione è rappresentata da una matrice

$$\exp\left[\mathrm{i}\,\theta\, J_Z\right]\,\mathbf{V} =$$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix}$$

Le algebre e certi vettori speciali detti radici....

Siccome le rotazioni sono trasformazioni continue, esse sono generate da generatori infinitesimi, come J_Z

$$J_Z = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J_Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J_X = \ldots$$

Siccome le trasformazioni del gruppo (= le rotazioni) non commutano, allora neanche i generatori commutano....

Essi generano un' algebra, cioé:

$$[J_X\,, J_Y] = J_Z$$
$$[J_Y\,, J_Z] = J_X$$
$$[J_Z\,, J_X] = J_Y$$

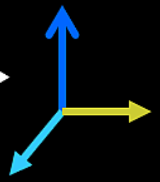
Le algebre e certi vettori speciali detti radici....

Ci sono gruppi molto più grandi del gruppo delle rotazioni che descrivono trasformazioni in spazi più complessi. Essi hanno molti più generatori......

I GENERATORI SI ORGANIZZANO SEMPRE COSI': **(Cartan – Weyl – Dynkin 1930-1945)**

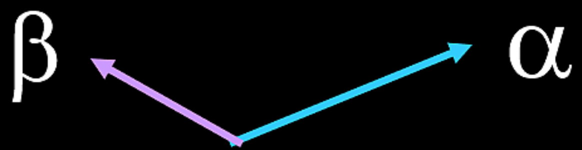
Algebra	**Geometria**

$\mathcal{H}_i$ — **Sotto algebra di Cartan**



Assi di uno spazio euclideo (o pseudoeuclideo ?)

E^{α} — **Operatori radice**



Speciali vettori in questo spazio

$$[\mathcal{H}_i\,,\,\mathcal{H}_j] = 0$$

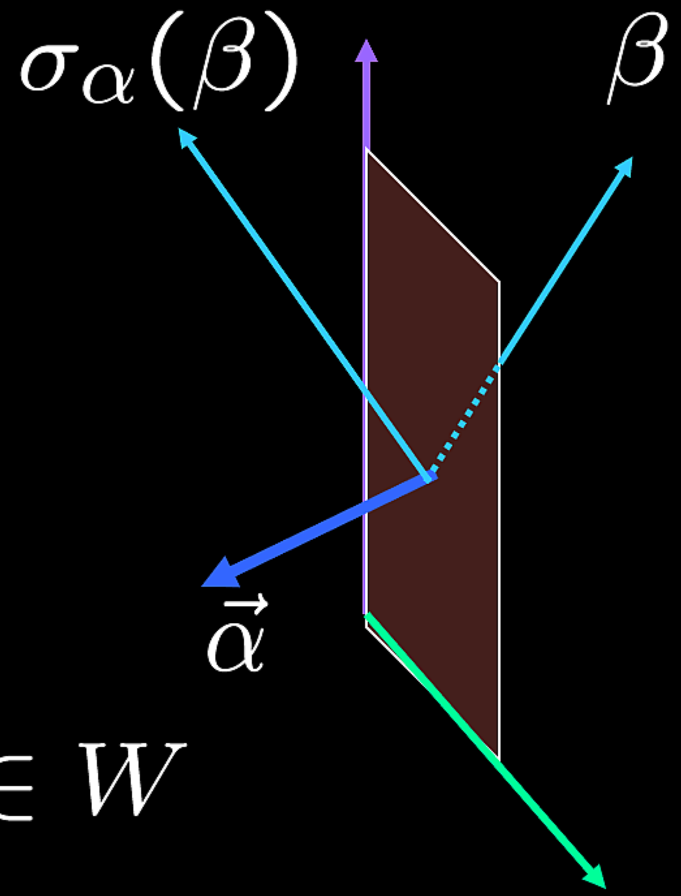
$$[\mathcal{H}_i\,,\,E^{\alpha}] = \alpha^i\,E^{\alpha}$$

$$[E^{\alpha}\,,\,E^{\beta}] = \begin{cases} E^{\alpha+\beta} \\ 0 \end{cases}$$

Proprietà speciali soddisfatte dal sistema di vettori, detti radici

I sistemi di radici

$$W = \{\alpha_1 \ldots \alpha_N\}$$

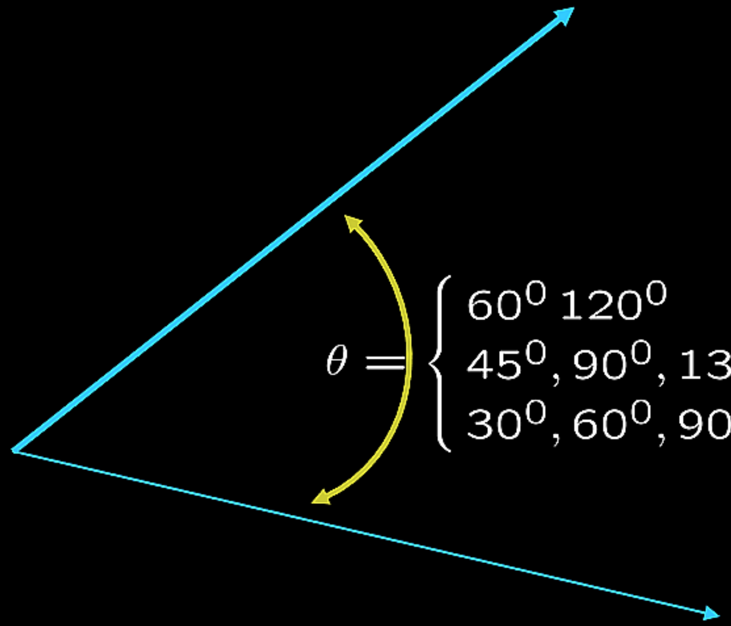


Tutta la struttura algebrica è riassunta in due proprietà od assiomi:

1) $\forall \alpha\, \beta \in W \qquad \sigma_\alpha(\beta) \in W$

2) $\forall\, \alpha, \beta \in W \qquad 2\,\dfrac{(\beta\,,\,\alpha)}{(\alpha\,,\,\alpha)} \in \mathbf{Z}$

I sistemi di radici

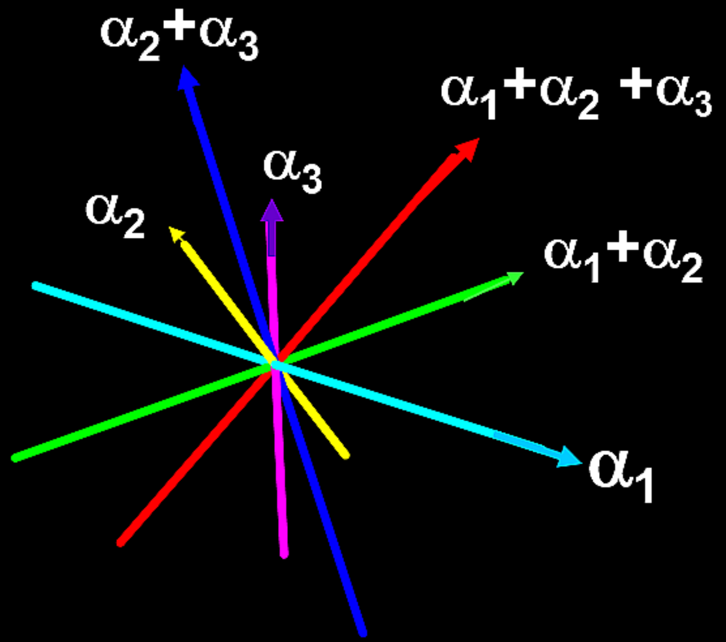


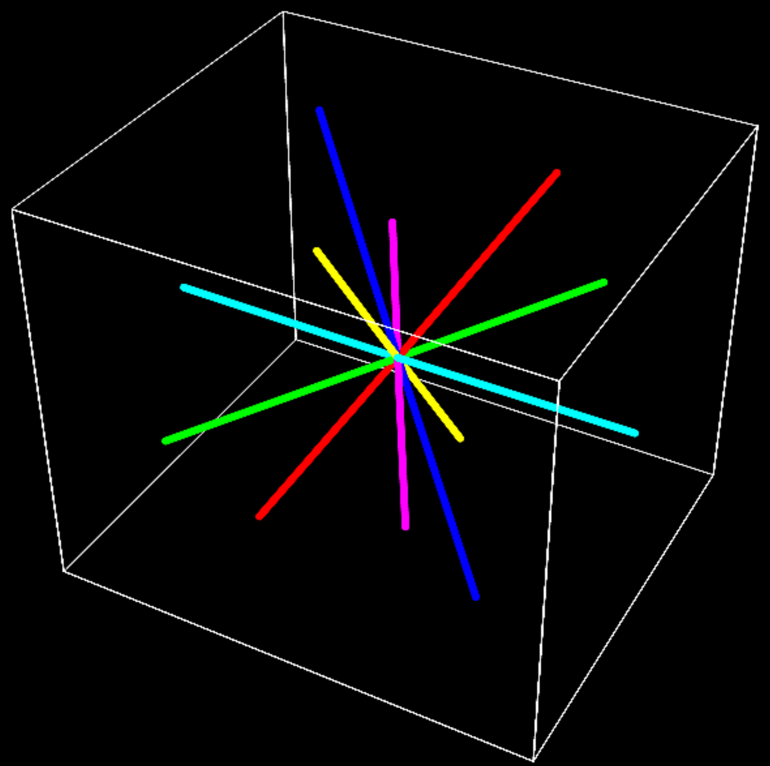
$$\theta = \begin{cases} 60^0\ 120^0 \\ 45^0, 90^0, 135^0, 180^0 \\ 30^0, 60^0, 90^0, 120^0, 150^0, 180^0 \end{cases}$$

1) $\forall \alpha\, \beta \in W \qquad \sigma_\alpha(\beta) \in W$

2) $\forall\, \alpha, \beta \in W \qquad 2\,\dfrac{(\beta\,,\,\alpha)}{(\alpha\,,\,\alpha)} \in \mathbf{Z}$

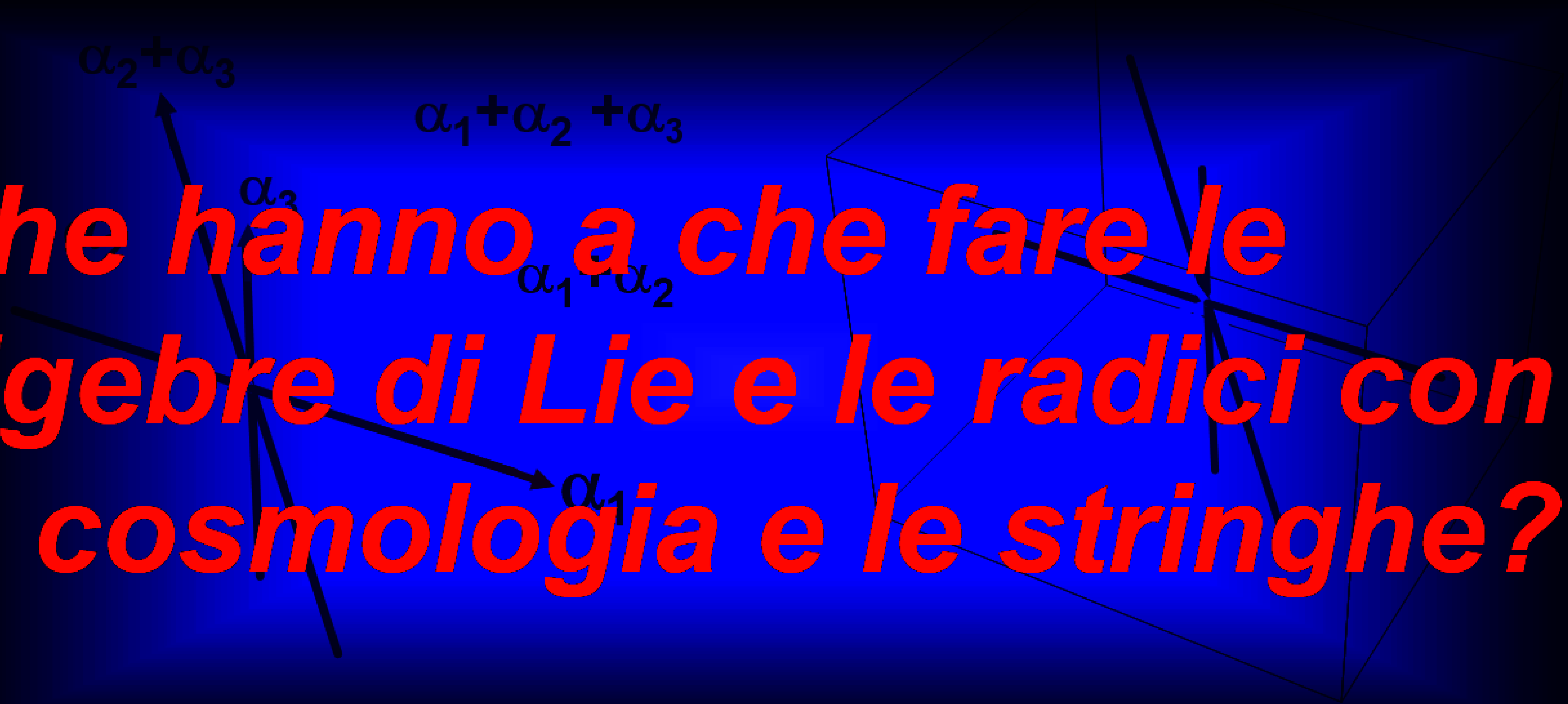
Un sistema di radici in tre dimensioni: A_3





α_1 , α_2 , α_3 **sono dette radici semplici: tutte le altre radici sono combinazioni intere di queste tre.**

Che hanno a che fare le algebre di Lie e le radici con la cosmologia e le stringhe?



Cerchiamo di capirlo.......

Si era detto che la Teoria delle Stringhe implica D=10 dimensioni spazio temporali.

Allora una metrica cosmologica che generalizza quella considerata prima in quattro dimensioni, sarà del tipo:

$$ds^2_{10D} = -e^{2a\tau}d\tau^2 + \sum_{i=1}^{9} e^{2p_i\tau}\, dx_i^2$$

Se non c'è materia la condizione perchè questa metrica sia soluzione delle equazioni di Einstein é:

$$\sum_{i=1}^{9} p_i^2 - (\sum_{i=1}^{9} p_i)^2 = 0 \quad ; \quad a^2 = \sum_{i=1}^{9} p_i^2$$

<u>Viene ora una idea a prima vista peregrina.... Immaginiamo che</u>

Cerchiamo di capirlo.......

Si era detto che la Teoria delle Stringhe implica D=10 dimensioni spazio temporali.

Allora una metrica cosmologica che generalizza quella considerata prima in quattro dimensioni, sarà del tipo:

$$ds^2_{10D} = -e^{2a\tau} d\tau^2 + \sum_{i=1}^{9} e^{2p_i\tau}\, dx_i^2$$

Se non c'è materia la condizione perchè questa metrica sia soluzione delle equazioni di Einstein é:

$$h_i(\tau) = p_i\,\tau$$

Siano le coordinate di una pallina che si muove di moto rettilineo uniforme con velocità $\Rightarrow$ p_i

Qual'è lo spazio 9 dimensionale in cui si muove questa pallina fittizia?

RISPOSTA:

La sottoalgebra di Cartan di un'algebra di rango 9 cioè con 9 generatori di Cartan.

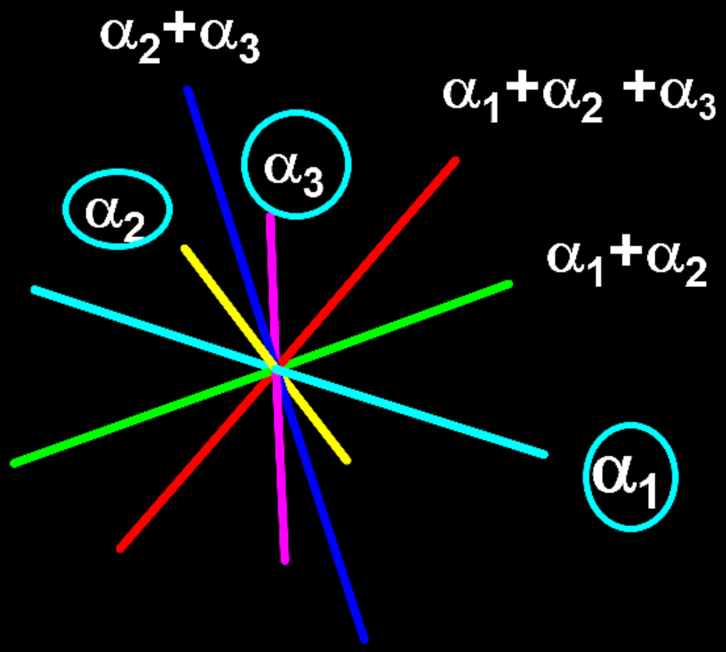
Chi è dunque quest'algebra di rango 9?

E' E_9 , cioè una estensione infinito dimensionale dell'algebra E_8

E chi è E_8 ?

In matematica le algebre (dei gruppi di Lie) sono classificate.......

dalle proprietà delle radici semplici. Ricordate quei vettori α_1, α_2 , α_3 tali che..........



E' sufficiente specificare i prodotti scalari delle radici semplici tra di loro, cioé la matrice (tutta di numeri interi):

$$C_{ij} = 2\frac{\left(\alpha_i\, ,\, \alpha_j\right)}{\left(\alpha_j\, ,\, \alpha_j\right)}$$

E tutte le radici sono fissate così come l'intera algebra (e pure il gruppo)

In matematica le algebre (dei gruppi di Lie) sono classificate.......

dalle proprietà delle radici semplici. Ricordate quei vettori α_1, α_2 , α_3 tali che..........

AD ESEMPIO PER A_3

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

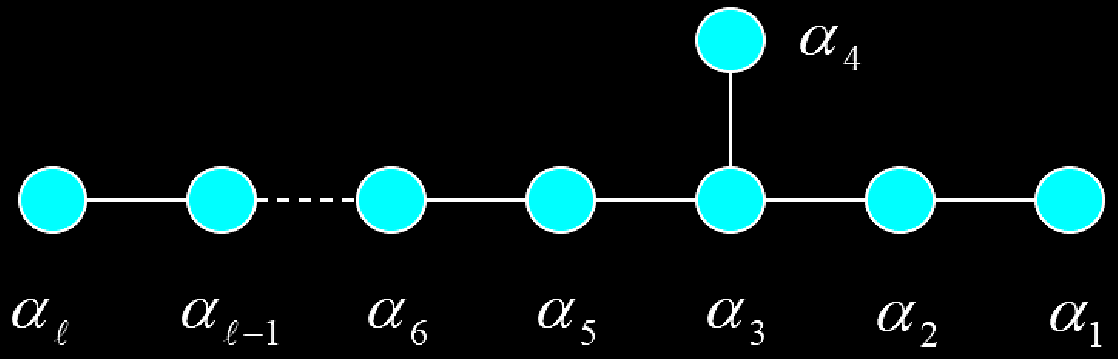
E tutte le radici sono fissate così come l'intera algebra (e pure il gruppo)

C'e' un modo grafico molto compatto di rappresentare queste matrici e quindi le algebre

Le algebre del tipo

Esistono per qualunque ℓ

Le algebre del tipo



Esistono solo per

$$\ell = 1, 2, \ldots, 7, 8$$

Serie E (eccezionale)

In uno spazio euclideo non si possono impaccare più di otto vettori con angoli di 120 gradi !!

Il gruppo E_r è il gruppo di dualità della Teoria delle Stringhe in dimensioni D = 10 – r + 1

In D=3 abbiamo E_8

Ed allora che cosa abbiamo in D=2 ?

Abbiamo E_9 !

Ma come? Più di 8 vettori non si possono impaccare in un spazio euclideo ad angoli di 120 gradi !

Già! Euclideo!! Ma non euclideo si può !!

Ricordate la condizione sugli esponenti p_i = (*velocità della pallina*)

$$\sum_{i=1}^{9} p_i^2 - (\sum_{i=1}^{9} p_i)^2 = 0 \quad ; \quad a^2 = \sum_{i=1}^{9} p_i^2$$

Abbiamo E_9 !

Ma come? Più di 8 vettori non si possono impaccare in un spazio euclideo ad angoli di 120 gradi !

Già! Euclideo!! Ma non euclideo si può !!

Ricordate la condizione sugli esponenti p_i = (*velocità della pallina*)

$$0 = p_i K_{ij} p_j \quad \textbf{dove} \quad K_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & \ldots & 2 \\ 2 & 0 & 2 & \ldots & 2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 2 & \ldots & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Se diagonalizziamo la matrice K_{ij} troviamo gli autovalori

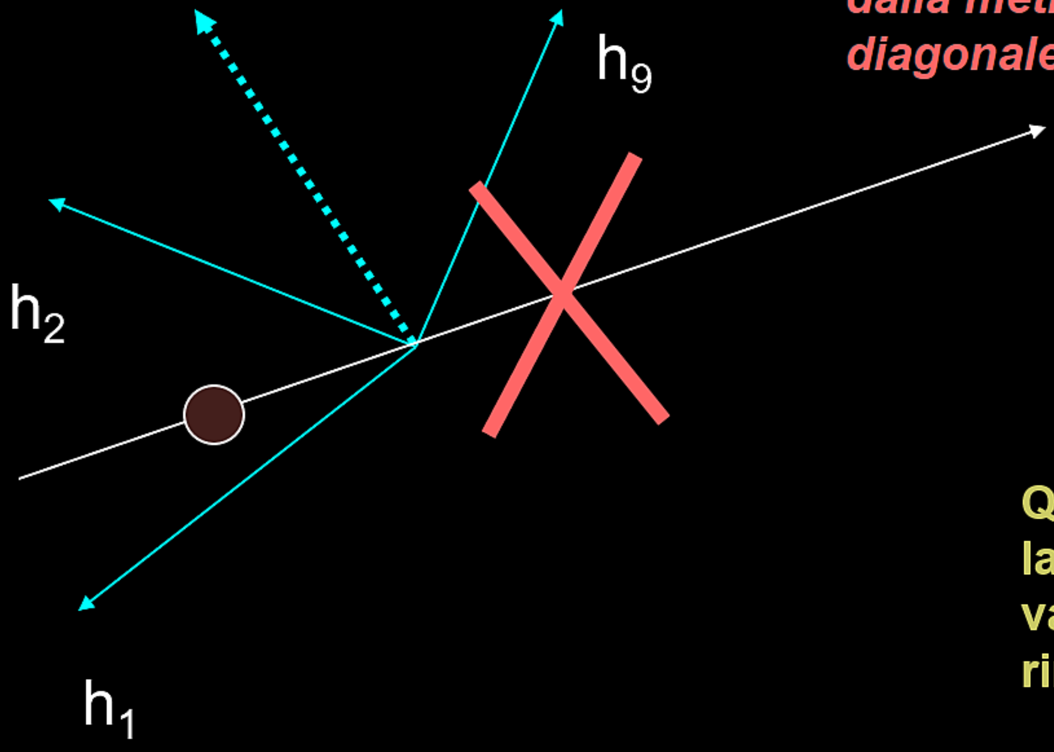
$$(-8, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$$

Ecco la segnatura non-euclidea nell'algebra di Cartan di E_9. E' un'algebra infinita (= infinite radici!!)

Ora teniamo conto anche delle radici......

Sono infinite, ma quelle di tipo tempo sono in numero finito. Sono 120 come per E_8. Tutte le altre sono di tipo luce.

Le radici di tipo tempo, rappresentano i vari campi leggeri della Stringa diversi dalla metrica diagonale (parti fuori diagonale) e campi di materia.

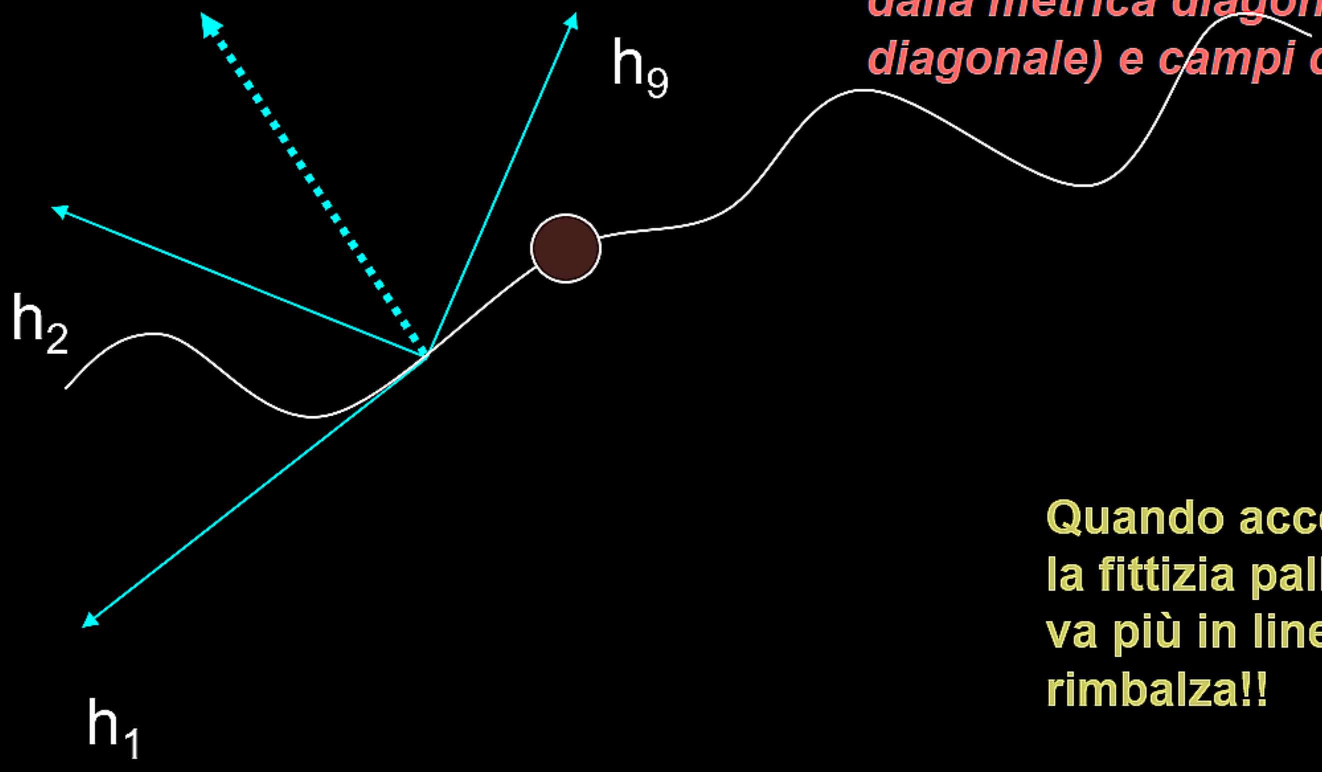


Quando accendiamo le radici, la fittizia pallina cosmica non va più in linea retta, ma rimbalza!!

Ora teniamo conto anche delle radici......

Sono infinite, ma quelle di tipo tempo sono in numero finito. Sono 120 come per E_8. Tutte le altre sono di tipo luce.

Le radici di tipo tempo, rappresentano i vari campi leggeri della Stringa diversi dalla metrica diagonale (parti fuori diagonale) e campi di materia.

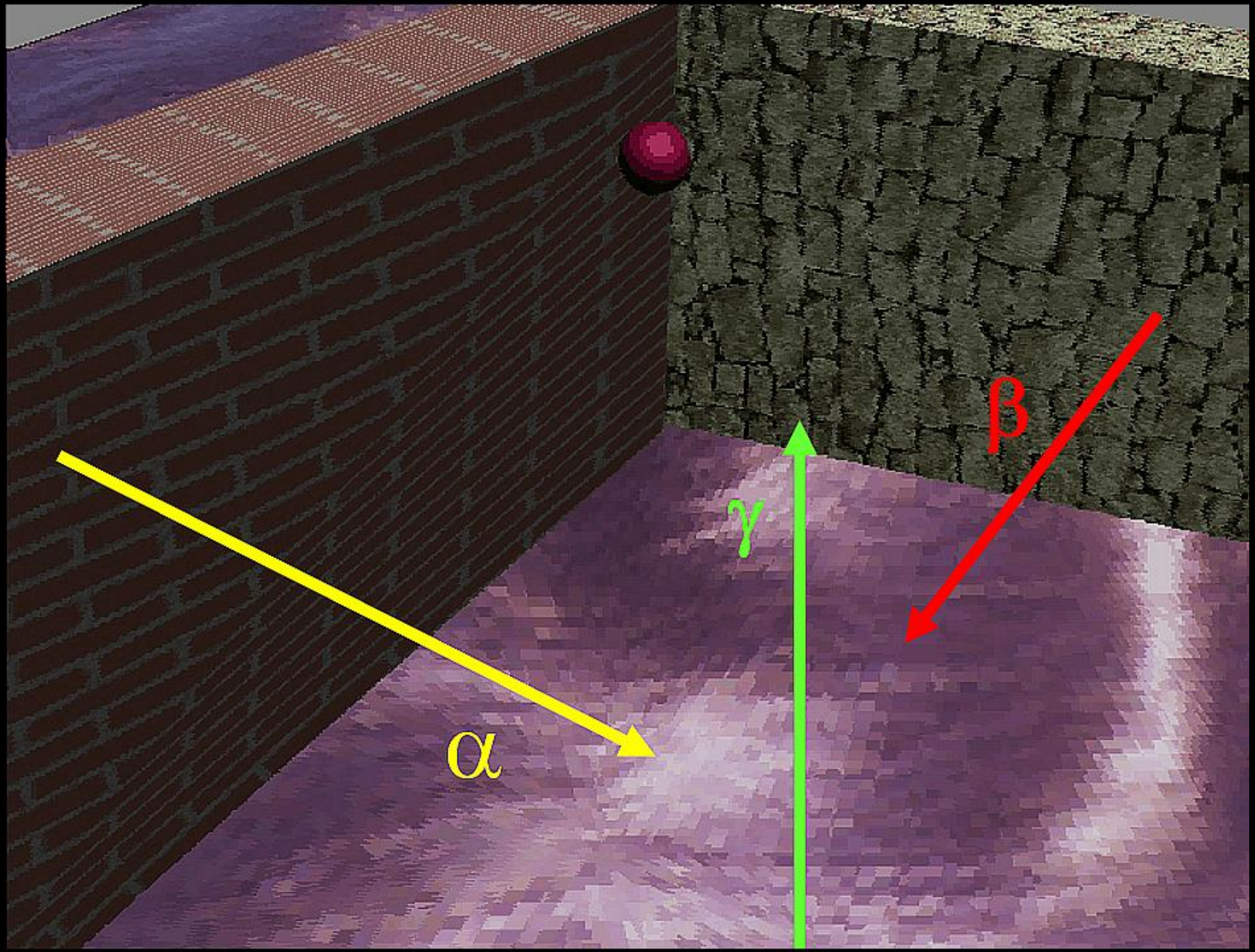


Quando accendiamo le radici, la fittizia pallina cosmica non va più in linea retta, ma rimbalza!!

Il biliardo cosmico

Le radici dell'algebra corrispondono o ad elementi fuori diagonale della metrica, ovvero a campi di materia (le p+1 forme che si accoppiano alle p-brane)

Accendendo una radice β si erige un muro su cui la pallina cosmica rimbalza

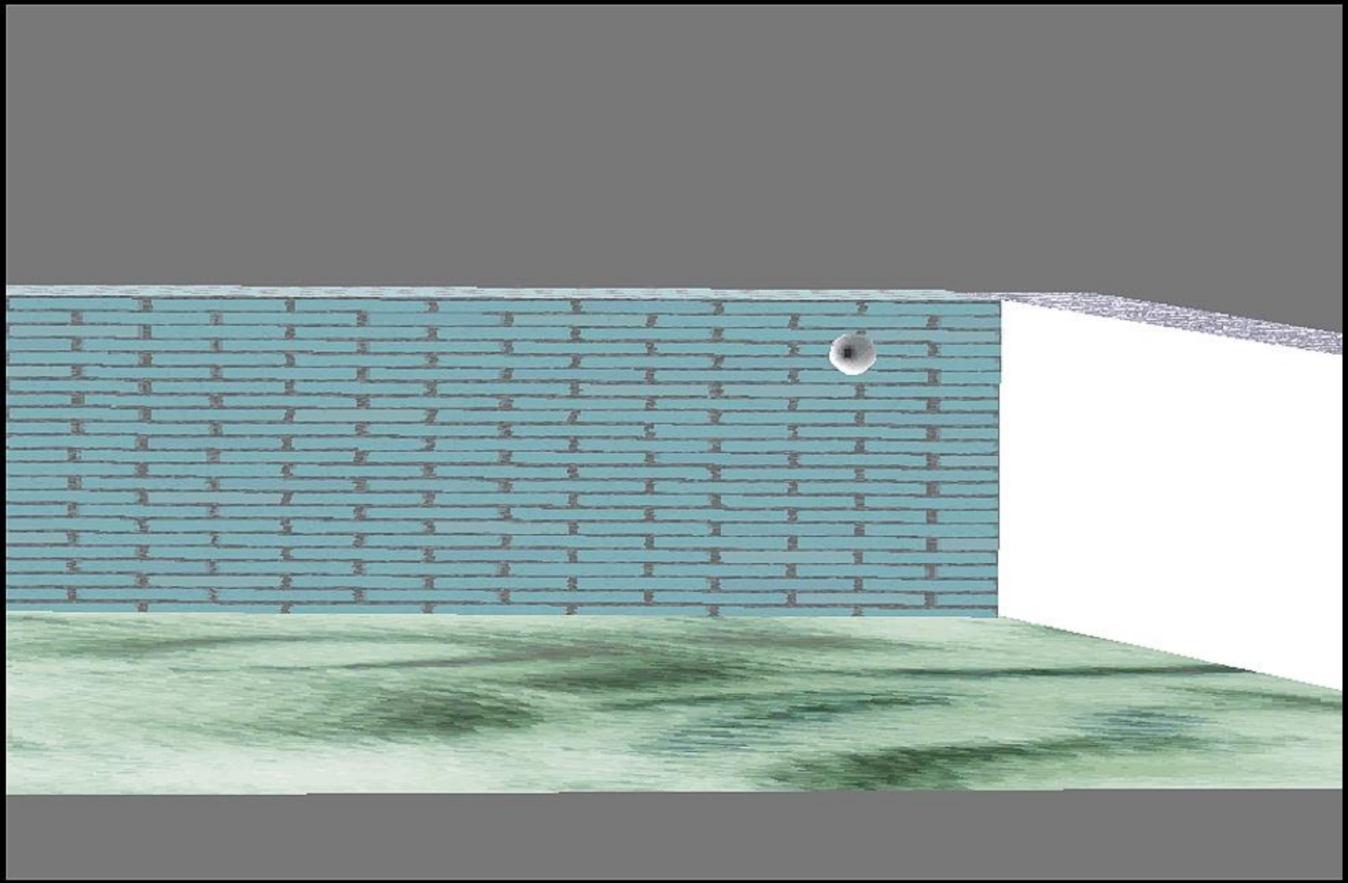


Il biliardo cosmico

Ovvero, visto di fronte

Le radici dell'algebra corrispondono o ad elementi fuori diagonale della metrica, ovvero a campi di materia (le p+1 forme che si accoppiano alle p-brane)

Accendendo una radice β si erige un muro su cui la pallina cosmica rimbalza



Quale è il significato del biliardo cosmico?

- *Il numero di dimensioni efficaci può variare nel tempo, dinamicamente!*
- *Alcune dimensioni sono depresse per un certo tempo cosmico e poi si dilatano, mentre altre si contraggono.*
- *I muri sono anche dinamici. Prima non esistono e poi si innalzano per un certo tempo per poi decadere di nuovo.*
- *I muri sono p-brane euclidee! (Space-branes)*
- *Quando c'è la brana le dimensioni in cui si estende sono grandi e dominanti, mentre quelle trasverse si contraggono.*
- *Quando la brana decade, avviene l'opposto*

Un esempio esplicito

La metrica é:

$$
\begin{aligned}
ds^2 \;=\; & -dt^2 e^{\sqrt{3}\omega t}\sqrt{\cosh[\frac{t\omega}{2}]} + e^{\frac{\sqrt{3}\omega t}{2}}\sqrt{\cosh[\frac{t\omega}{2}]}\left(dx_1^2 + dx_2^2\right) \\
& + \frac{1}{\sqrt{\cosh[\frac{t\omega}{2}]}}\left(dx_3^2 + dx_4^2 + dx_8^2 + dx_9^2\right) \\
& + \sqrt{\cosh[\frac{t\omega}{2}]}\left(dx_5^2 + dx_6^2 + dx_7^2\right)
\end{aligned}
$$

Ma c'é anche una F5 che corrisponde alla presenza di una D3 brana spaziale

$$
F_{[5]}^{RR} = \frac{\omega\, dt \wedge dx_3 \wedge dx_4 \wedge dx_8 \wedge dx_9}{1 + \cosh t\,\omega} + \frac{\omega\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_5 \wedge dx_6 \wedge dx_7}{2}
$$

Questo campo é associato ad una radice ed abbiamo un muro!!!!

Muri che crescono.......

3 4 8 9 = direzioni parallele alla brana

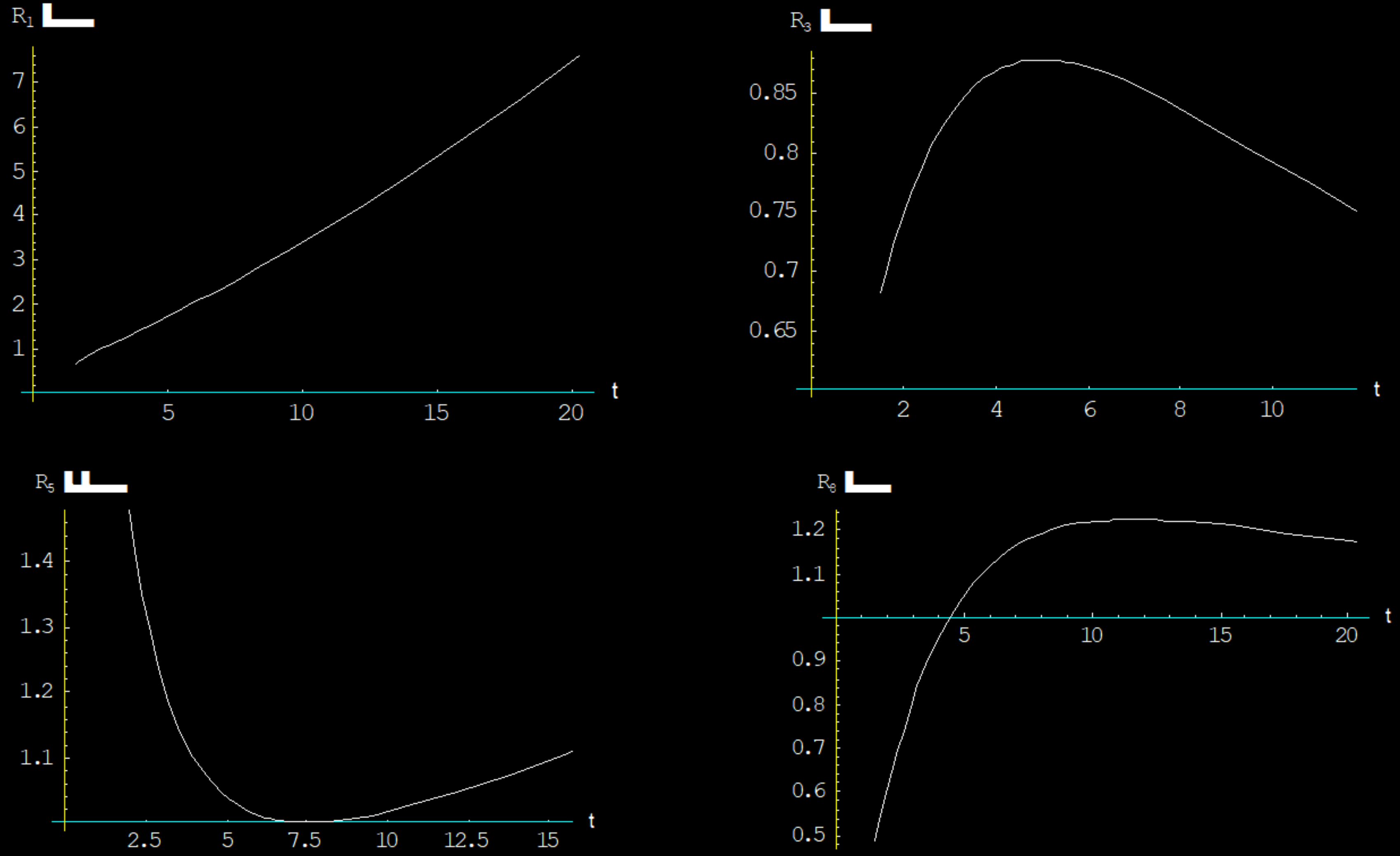
= muro

1 2 5 6 7 = direzioni trasverse alla

brana

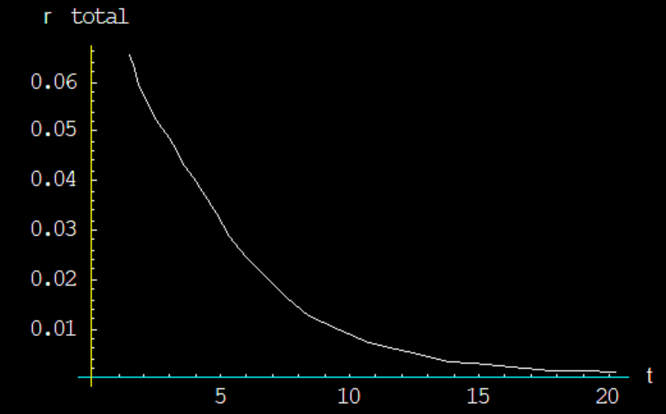
fenomeno di un biliardo “liscio”

Direzioni trasverse | **Direzioni parallele alla brana**

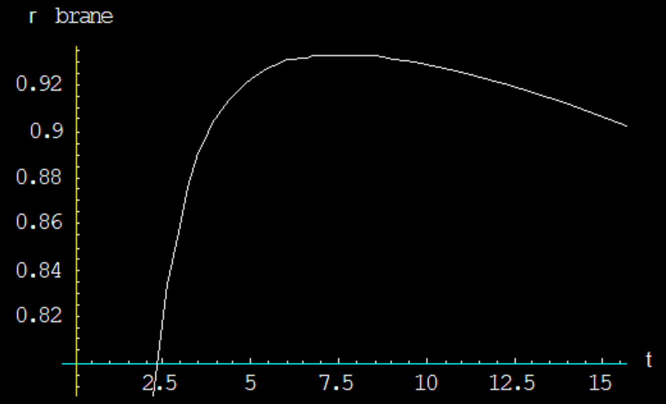


Rivediamo la stessa verità nei grafici della densità di energia e della pressione

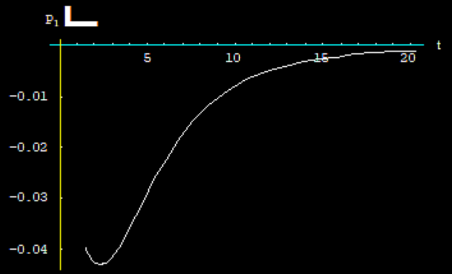
Plot of the total energy density



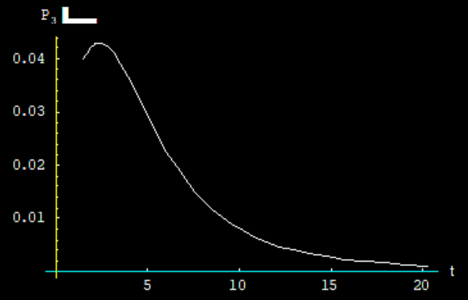
Plot of the ratio $\frac{\text{brane energy}}{\text{total energy}}$



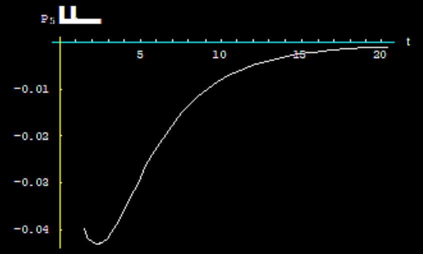
Plot of the pressures of the brane



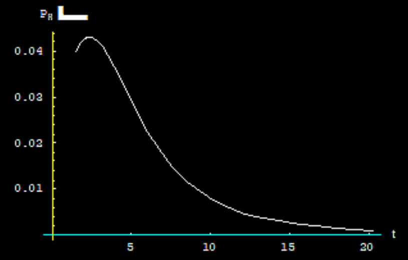
P in 12



P in 34



P in 567



P in 89

- La discussione delle soluzioni cosmologiche e del biliardo cosmico illustrano un pò il ruolo dei gruppi di dualità delle Stringhe

- Le dualità hanno molti altri aspetti importantissimi, ma quando si considerano configurazioni dipendenti dal tempo esse sono messe in particolare evidenza perchè è come ridursi ad una sola dimensione ed è in bassa dimensione che le dualità si vedono meglio.

- Il biliardo cosmico apre un nuovo paradigma per l'interpretazione delle dimensioni aggiuntive. Forse il nostro Universo non le vede al tempo attuale, ma le ha viste in passato o le vedrà in futuro.

- Forse anche il nostro Universo vive sul world volume di una brana che poi decadrà e si scioglierà nelle 10 Dimensioni dove altre brane sorgono continuamente.