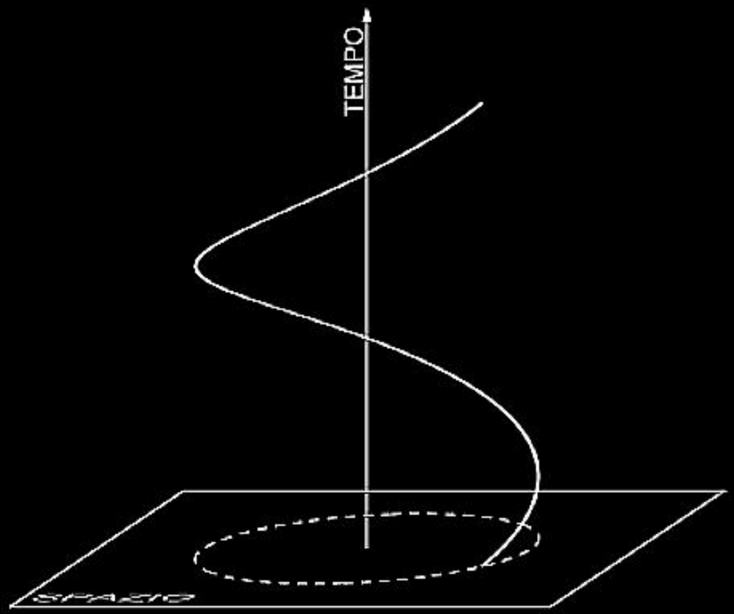
Università della Terza Età "Cardinale Giovanni Colombo" – Milano

A. A. 2022 - 2023

Corso di Astrofisica

Docente:
Adriano Gaspani

Lo Spazio-Tempo di Minkowsky



lo spaziotempo
di
Minkowski

Hermann Minkowski

Hermann Minkowsky

Hermann Minkowski (Aleksotas, 22 giugno 1864 – Gottinga, 12 gennaio 1909) è stato un matematico lituano. Egli sviluppò la teoria geometrica dei numeri ed utilizzò metodi geometrici per risolvere impegnativi problemi della teoria dei numeri, della fisica matematica e della teoria della relatività.
Nel 1907 Minkowski giunse al convincimento che la teoria della relatività speciale (conosciuta anche come relatività ristretta), introdotta da Einstein nel 1905 e basata su precedenti lavori di Lorentz e di Poincaré, potesse essere meglio compresa nell'ambito di uno spazio non euclideo, da allora noto come spazio di Minkowski, in cui il tempo e lo spazio non sono entità separate ma connesse fra loro in uno spazio-tempo quadridimensionale, e nel quale la geometria di Lorentz della relatività ristretta può essere opportunamente rappresentata. Tale rappresentazione risultò utile e senz’altro aiutò le indagini di Einstein in merito alla relatività generale.
La parte iniziale del suo discorso pronunciato in occasione dell'ottantesima Assemblea degli Scienziati della Natura e dei Medici Tedeschi (21 settembre, 1908) è divenuta famosa:
« I concetti di spazio e di tempo che desidero esporvi traggono origine dal terreno della fisica sperimentale, e in ciò risiede la loro forza. Sono radicali. D'ora in avanti lo spazio singolarmente inteso, ed il tempo singolarmente inteso, sono destinati a svanire in nient'altro che ombre, e solo una connessione dei due potrà preservare una realtà indipendente. »

Spaziotempo di Minkowski

Minkowski, che era stato un insegnante di Einstein, si accorge che la Relatività dimostra che lo spazio ed il tempo sono uniti in uno *spaziotempo* quadridimensionale.
Un **evento** è qualunque cosa accada in un dato luogo e in un dato istante.
Possiamo caratterizzarlo con le tre coordinate spaziali che indicano *dove* ha avuto luogo, associate alla coordinata temporale che indica *quando* si è verificato.
Usiamo i simboli x, y, z per indicare le tre coordinate spaziali e la variabile t per indicare quella temporale.
Un evento è univocamente determinato dalla quaterna
(x, y, z, t).

Distanza tra due punti

La distanza tra i punti A e B è data dalla formula:

$$d = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$ (2 dimensioni)

$$d = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2 + (t_B - t_A)^2}$$ (4 dimensioni)

Spaziotempo di Minkowski – Intervallo

Sappiamo che i punti della geometria quadridimensionale di Minkowski si chiamano eventi. La distanza tra due eventi A e B si chiama **intervallo** e qui lo indichiamo con *d:*

$$d^2 = c^2(t_B - t_A)^2 - (x_B - x_A)^2 - (y_B - y_A)^2 - (z_B - z_A)^2$$

Questo valore è una **invariante** per qualsiasi osservatore inerziale. E' l'analogo della distanza euclidea, ma confrontandolo con la diapositiva precedente, si vede che è diverso, a causa della comparsa del segno "-".
La geometria di Minkowski è *pseudo-euclidea*.
Non è uno spazio curvo (vedi Relatività Generale).

Spaziotempo di Minkowski – Intervallo II

Supponiamo che l'evento **A** corrisponda all'emissione di un segnale luminoso e che l'evento **B** corrisponda all'arrivo di questo segnale luminoso. Per la definizione di velocità:

$$\frac{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}{(t_B - t_A)} = c^2$$

Si ricava immediatamente (vedi diapositiva precedente) che l'intervallo che separa i due eventi "invio di un segnale luminoso" e "arrivo di un segnale luminoso" è uguale a **zero.** Questo è vero per qualsiasi osservatore.

Classificazione degli intervalli

Il quadrato dell'intervallo (che è indipendente dal sistema di riferimento) può essere:

- **Nullo:** l'intervallo è detto di **tipo luce**
- **Positivo:** l'intervallo è detto di **tipo tempo**.

E' il caso di due eventi separati spazialmente nel sistema **S**; si trova che esiste un sistema **S'** in cui i due eventi occupano la <u>stessa posizione</u> nello spazio. Se i due eventi sono relativi alla stessa particella materiale, l'intervallo tra essi è sempre di tipo tempo.

- **Negativo:** l'intervallo è detto di **tipo spazio**.

E' il caso di due eventi che avvengono in istanti differenti nel sistema **S**; si trova che esiste un sistema **S'** in cui i due eventi avvengono <u>simultaneamente</u>.

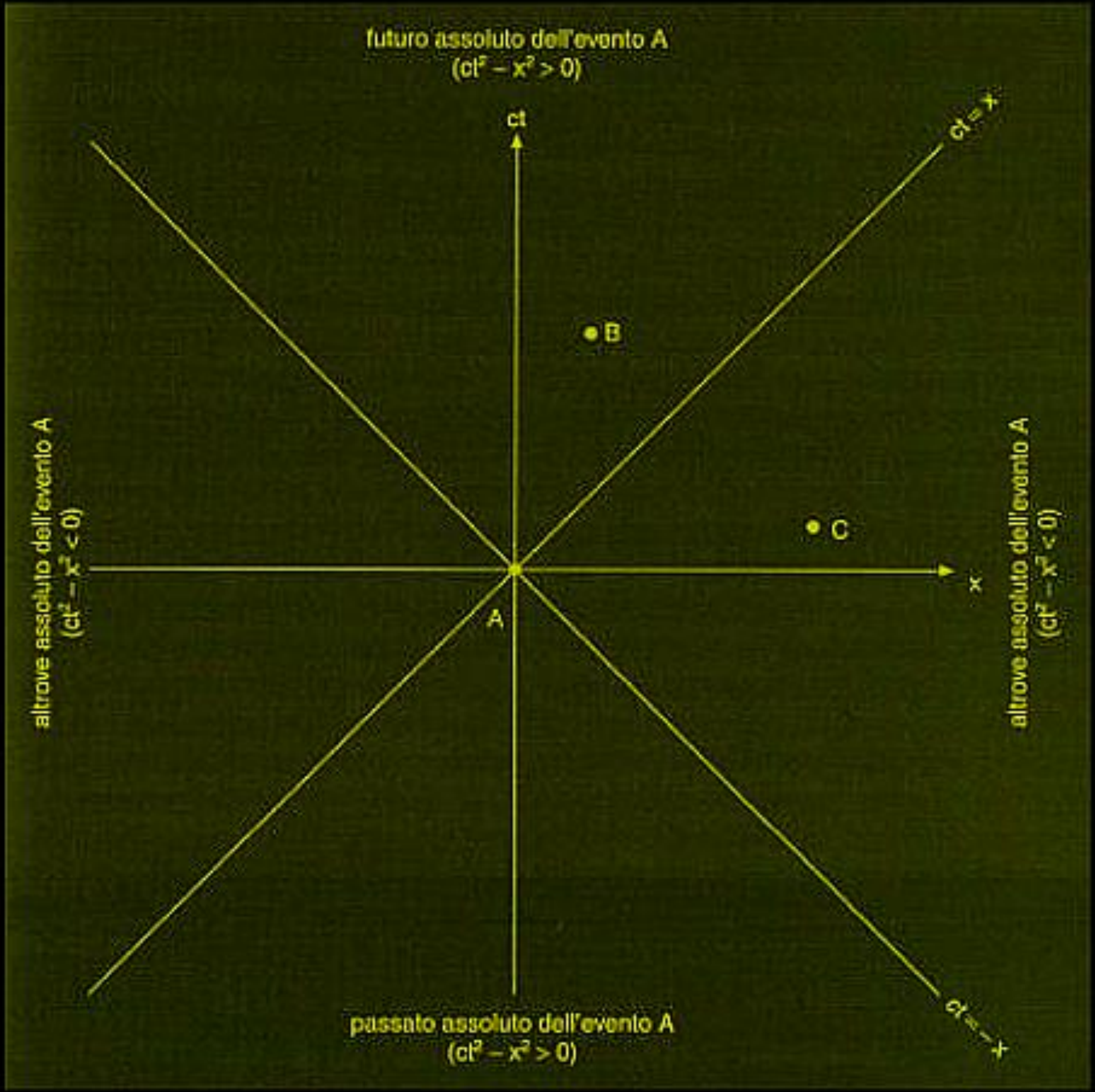
La prossima diapositiva (il *Cono di Luce*) chiarisce questi concetti.

Cono di Luce

Per comodità, è raffigurata una sola dimensione spaziale.

A e B sono eventi separati da un intervallo di genere tempo.

A e C sono eventi separati da un intervallo di genere spazio.



Cono di Luce: commenti

- Tutti gli eventi *interni* al cono luce e corrispondenti a istanti successivi a quello di A costituiscono il **futuro assoluto** di A, qualsiasi sia il sistema di riferimento inerziale. Esiste però un sistema di riferimento in cui i due eventi occupano lo stesso punto dello *spazio*.

- Tutti gli eventi *esterni* al cono luce costituiscono l'a**ltrove assoluto** di A. Questi eventi rimangono, in qualsiasi sistema di riferimento, in punti dello spazio diversi da A. Non esiste alcun sistema nel quale uno di tali eventi coincida spazialmente con l'evento A. Però esistono dei sistemi nei quali esso è successivo ad A, oppure esso precede A, oppure esso accade simultaneamente ad A.

- Il confine del cono è costituito dai raggi di luce che partono da A o arrivano in A.

•Einstein sa che dalle equazioni di Maxwell si può ricavare la velocità della luce:

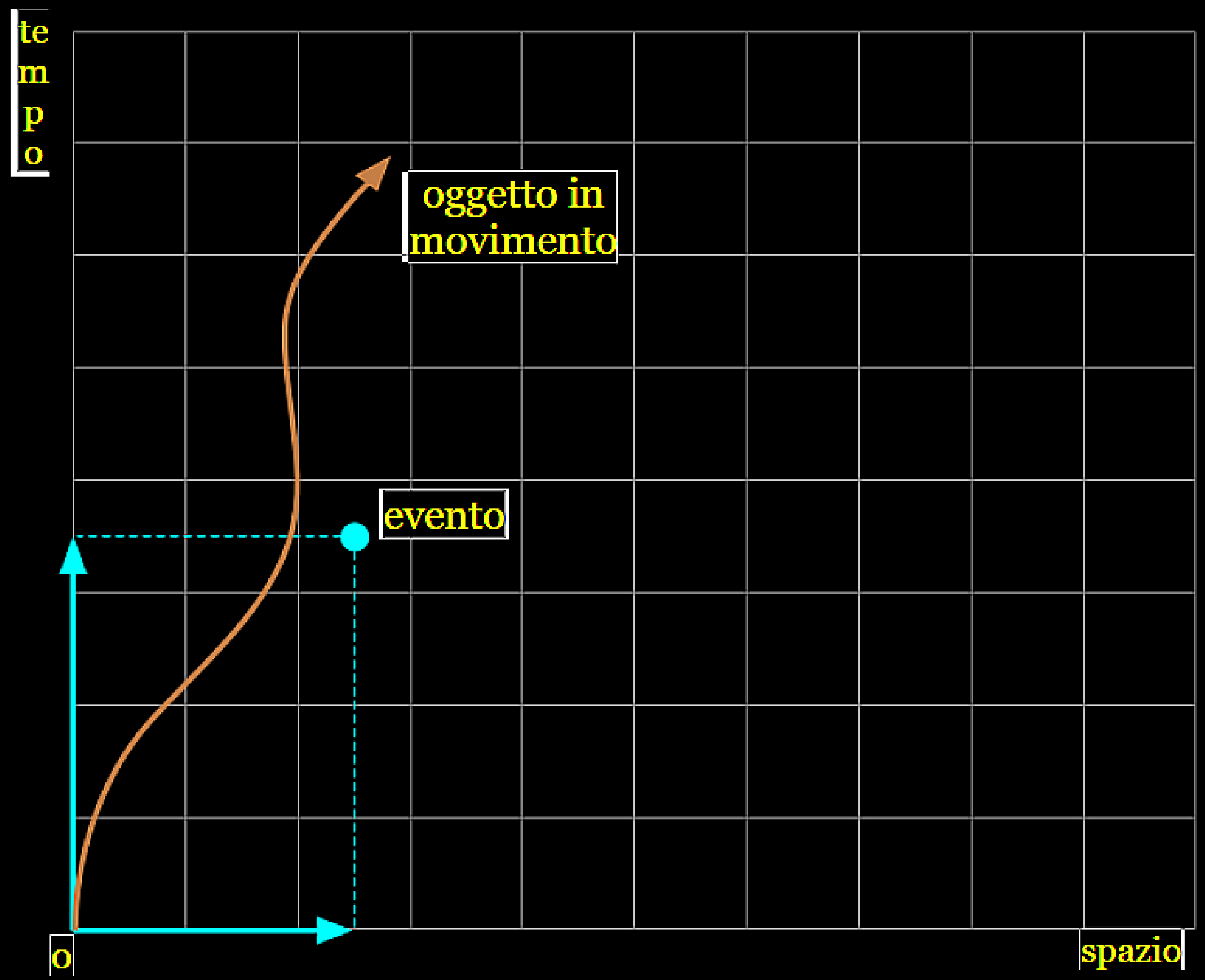
$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}.$$

e che tale valore è una *costante*; μ_0 e ε_0 sono delle costanti che descrivono le proprietà elettromagnetiche del vuoto.

•Per il principio di relatività, tutti gli osservatori inerziali devono misurare questa stessa velocità per la luce, indipendentemente dalla loro velocità relativa.

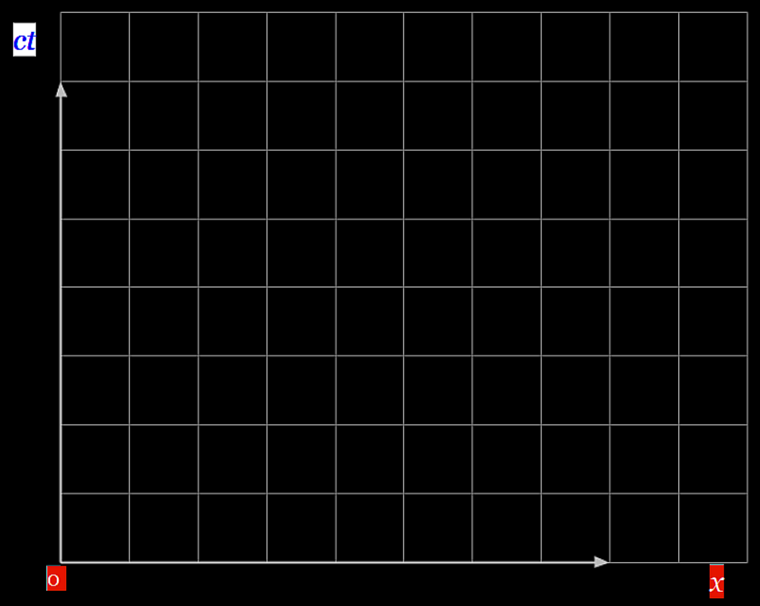
•Pertanto le trasformazioni di Galileo, che consentono di sommare la velocità della luce a quella di un sistema di riferimento, sono *sbagliate*.

spazio + tempo = spaziotempo



Spazio-Tempo di Minkowsky

Lo spaziotempo di Minkowski è una particolare mappa spazio-temporale dove lo spazio è rappresentato in ascissa e il tempo in ordinata.
Utilizzeremo queste mappe come una sorta di mappa concettuale di ciò che avviene nel modo soprattutto dal punto di vista di osservatori differenti.
L'insieme delle tre dimensioni spaziali è stato ridotto per evidenti necessità ad una sola dimensione.
cosa rappresentano i punti, le linee, le curve e le aree su questi diagrammi?
Punti: un punto nello spaziotempo definisce un luogo particolare in un istante particolare, cioè un **evento**
Curve: gli oggetti in movimento saranno rappresentati nello spaziotempo come a **traiettorie** o **curve**



L’invarianza dell’intervallo spazio-temporale di Minkowski

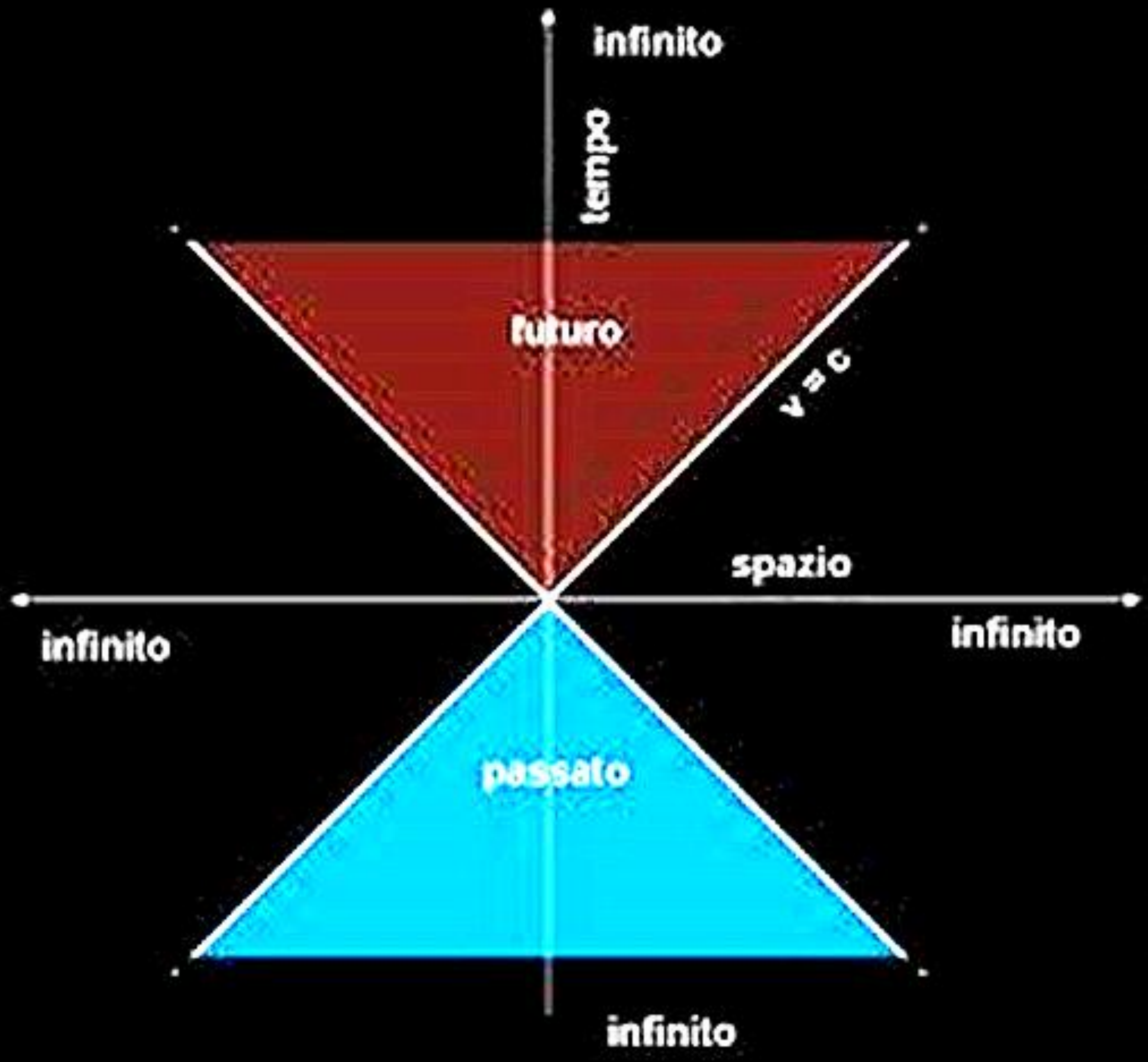
Un evento indica una posizione nello spazio-tempo ed è indicato mediante un quadrivettore in cui compaiono sia le coordinate spaziali che quelle temporali (x,y,z,t)

Nello Spazio di Minkowski un quadrivettore (o tetravettore) è una quadrupla di valori che nelle trasformazioni di coordinate tra due riferimenti inerziali rispetta le Trasformazioni di Lorentz

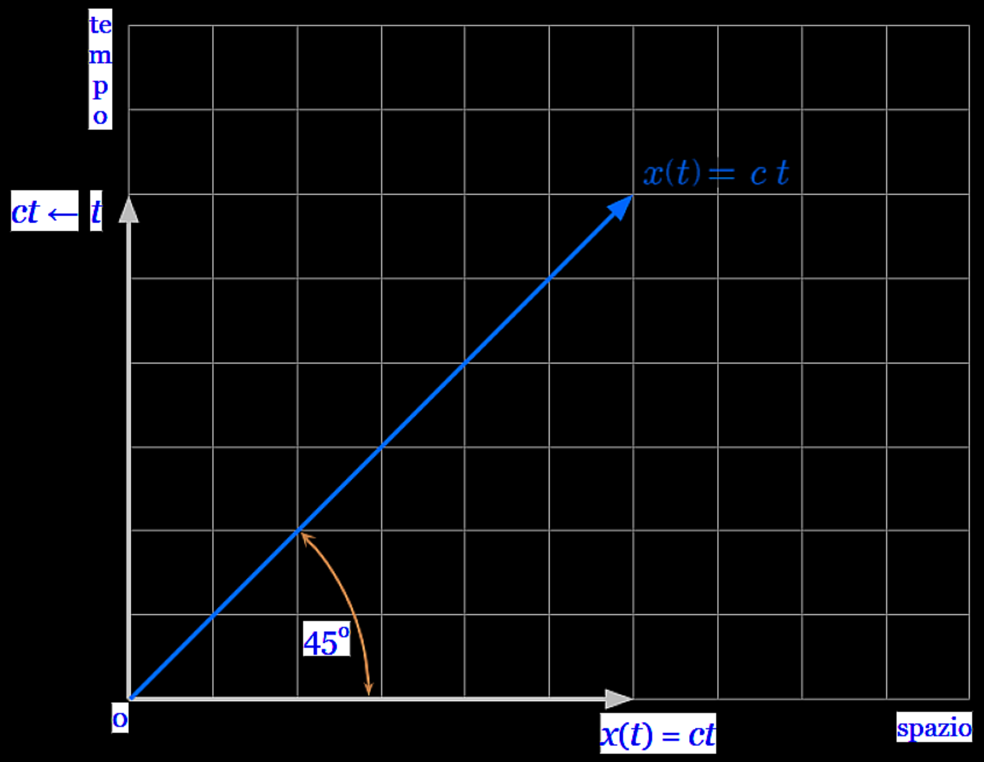
Spazi e tempi però non sono grandezze omogenee quindi non si possono sommare insieme, per questo le co-ordinate del punto-evento non si scrivono esattamente (x, y, z, t), ma in realtà sono (x, y, z, ct), moltiplicando l’asse dei tempi per la velocità della luce

Una conseguenza della scelta di operare con i diagrammi (x,ct) è che un oggetto in moto alla velocità della luce viene ad essere rappresentato da una linea inclinata di 45° rispetto agli assi.

L'invarianza dell'intervallo spazio-temporale di Minkowski

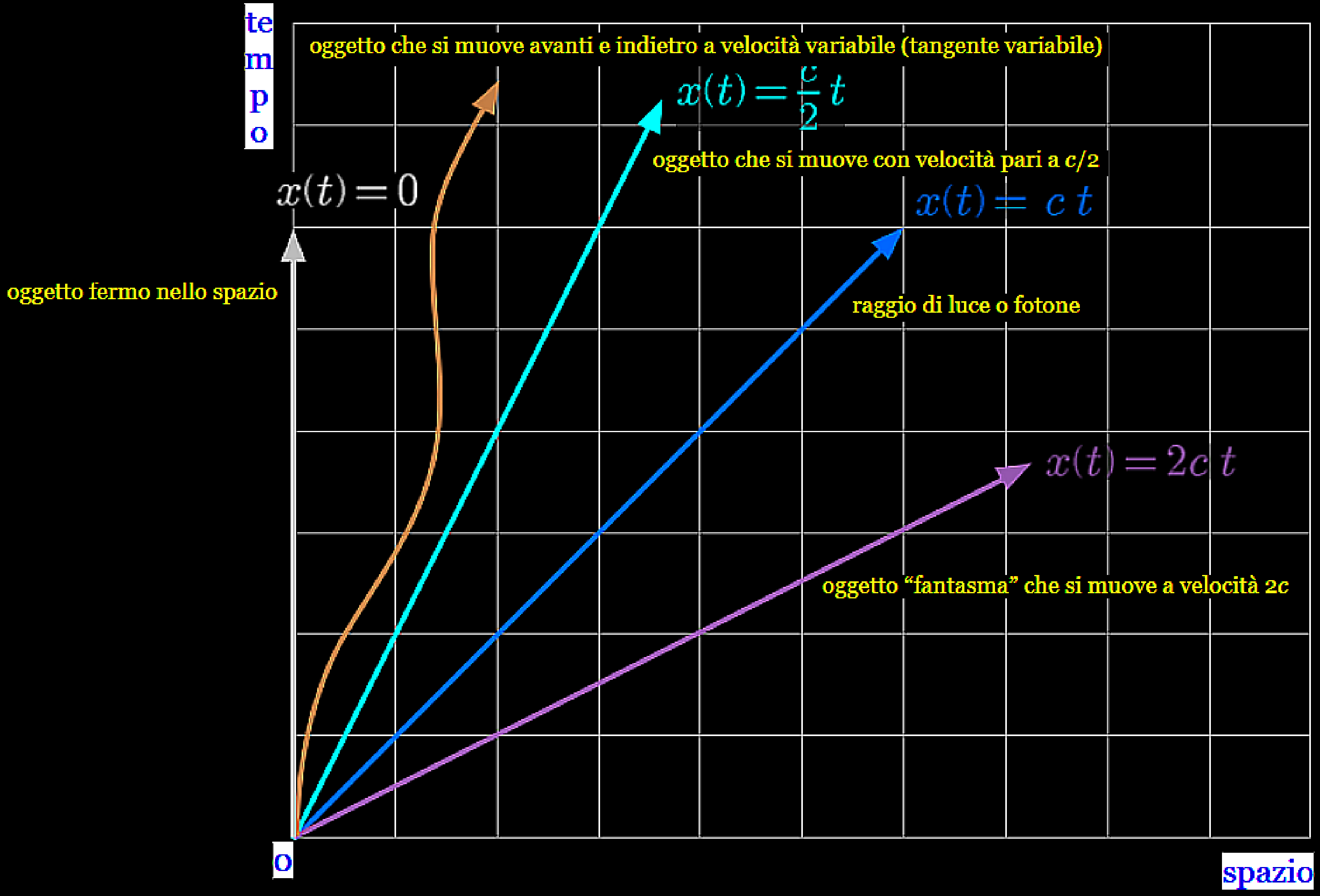


la scala dello spaziotempo



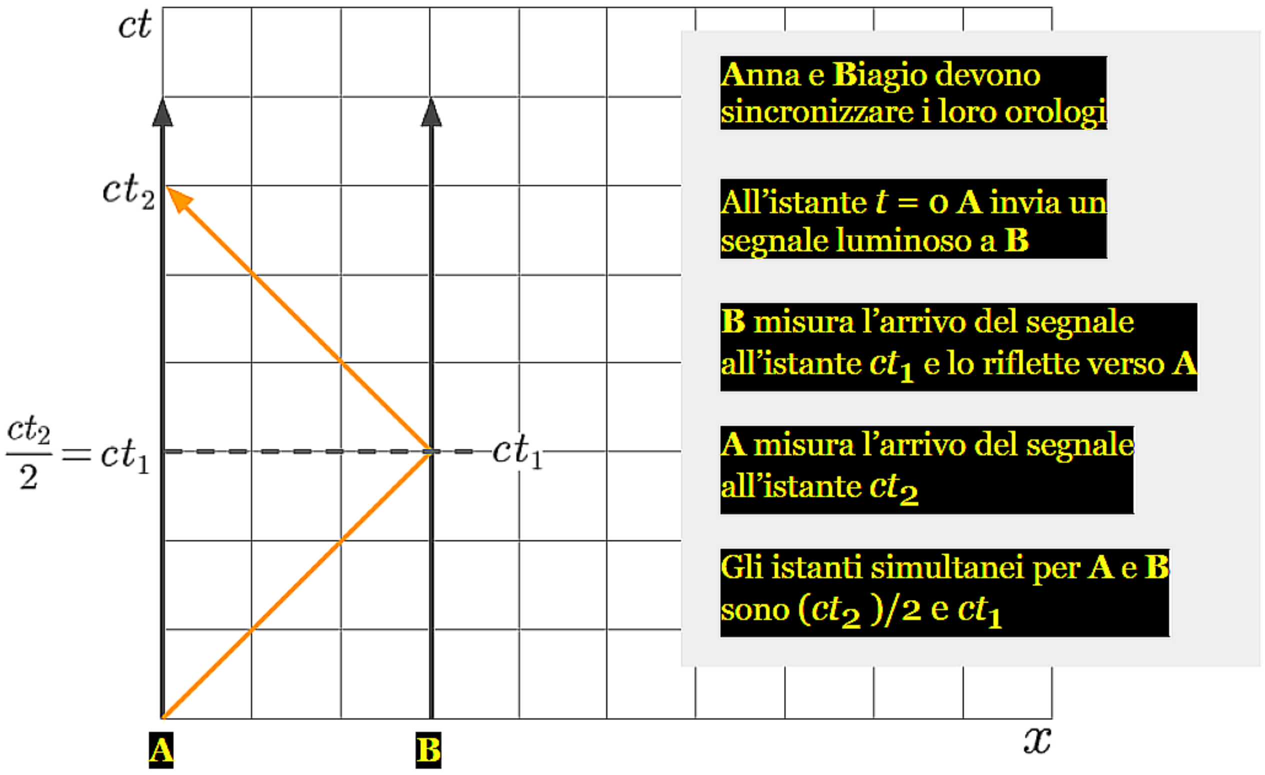
I fenomeni che vogliamo discutere sono legati dal rapporto tra la distanza e il tempo, dalla distanza per unità di tempo, cioè dalla velocità. La scala da adottare è fissata dalle velocità tipiche della relatività ristretta: **la velocità della luce c**

Per definire una scala decidiamo di usare un certo intervallo di tempo come unità per l'asse del tempo; come unità per l'asse dello spazio prenderemo la distanza percorsa dalla luce durante l'intervallo di tempo. Affinché le traiettorie della luce risultino rette inclinate di 45° useremo *ct* a posto di *t* come unità di misura dell'asse del tempo.



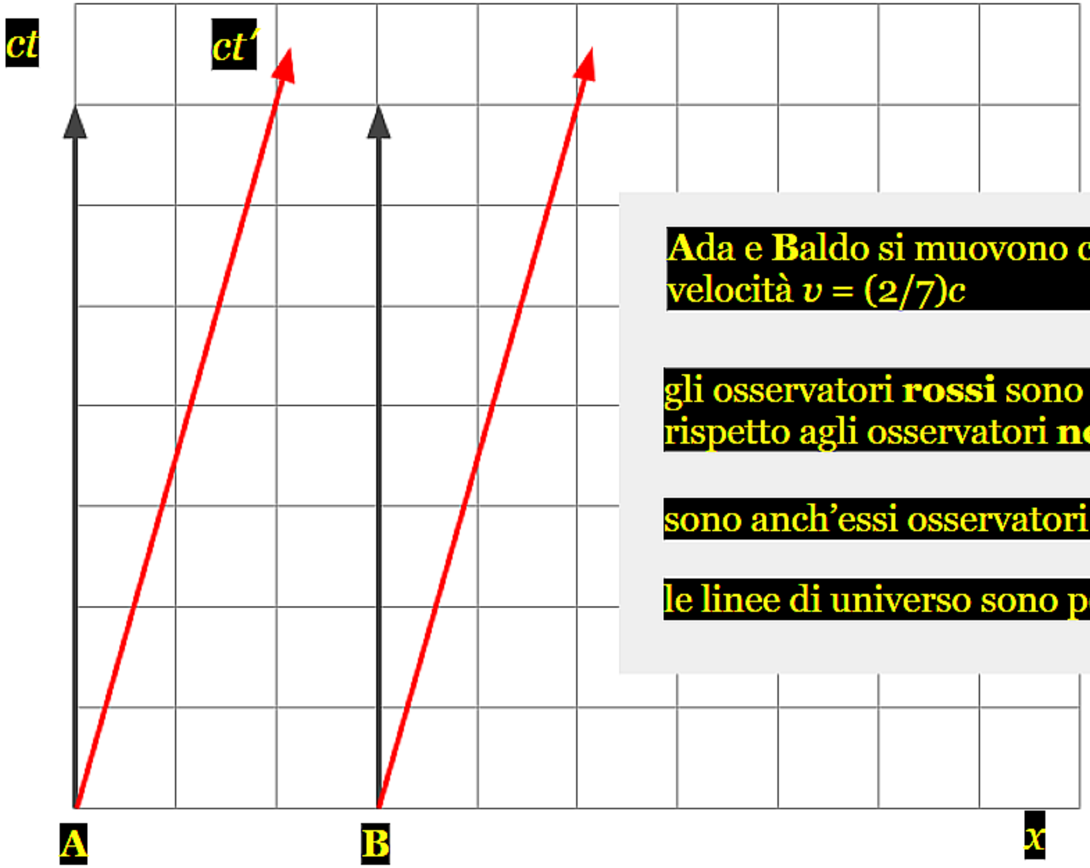
Le traiettorie nello spaziotempo vengono chiamate **linee di universo**

la relatività della simultaneità



Due osservatori **A**nna e **B**iagio, in quiete l'uno rispetto all'altro separati da una grande distanza, devono sincronizzare i loro orologi per poter confrontare le proprie misure temporali.
Attenzione: questa nozione di simultaneità non implica che eventi simultanei siano osservati da tutti gli osservatori, in quiete l'uno rispetto all'altro, nello stesso istante! Bisogna tener conto del diverso tempo impiegato dal segnale per andare dall'evento considerato ai diversi osservatori. Gli osservatori, tenendo conto ciascuno del tempo di propagazione del segnale, assoceranno poi l'evento allo stesso istante di tempo.

sistemi di riferimento in moto



Ada e **B**aldo si muovono con velocità $v = (2/7)c$

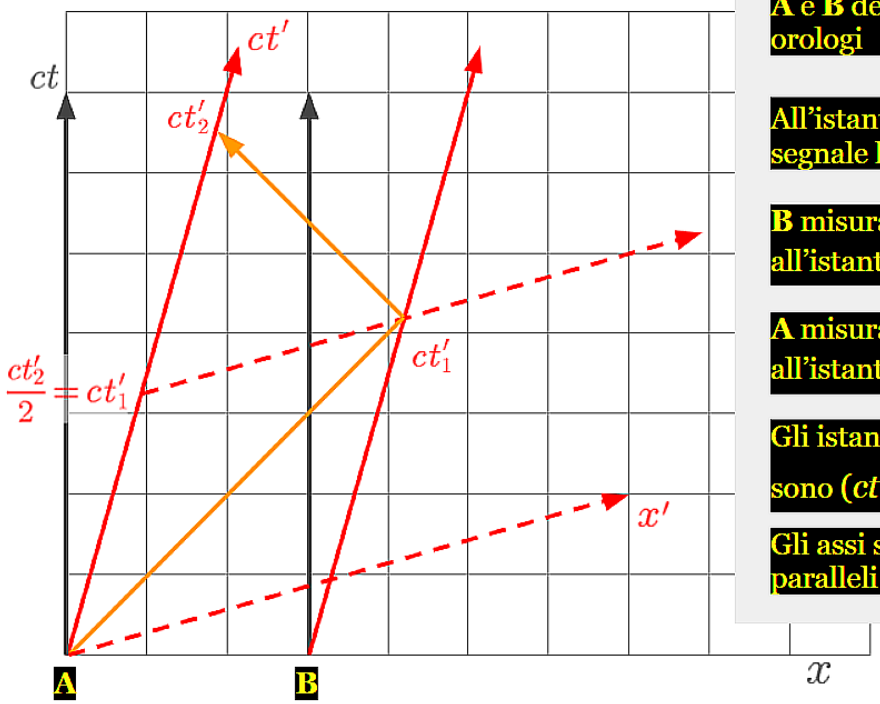
gli osservatori **rossi** sono in moto rispetto agli osservatori **neri**

sono anch'essi osservatori inerziali

le linee di universo sono perciò rette

Ada e Baldo sono due osservatori in moto con velocità $v = (2/7)c$ rispetto agli osservatori Anna e Biagio

la relatività della simultaneità



A e **B** devono sincronizzare i loro orologi

All'istante $t = 0$ **A** invia un segnale luminoso a **B**

B misura l'arrivo del segnale all'istante $ct_1{}'$ e lo riflette verso **A**

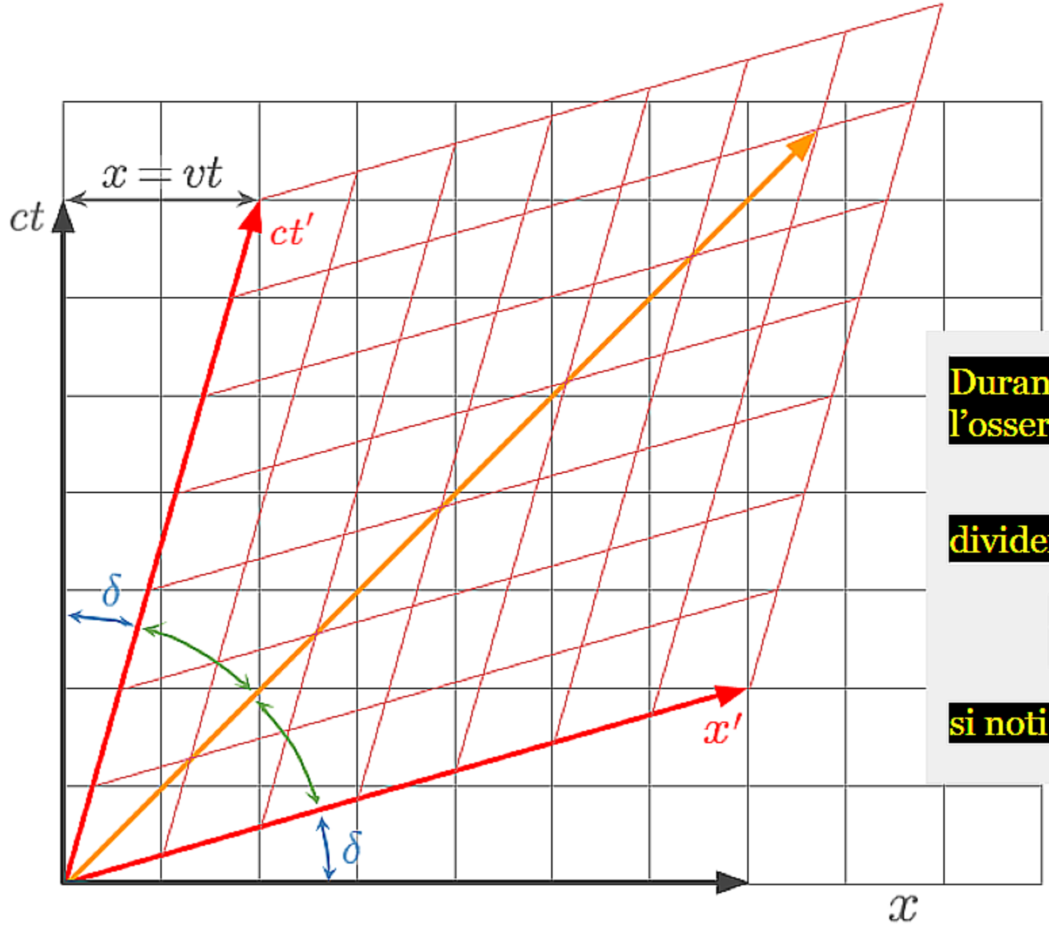
A misura l'arrivo del segnale all'istante $ct_2{}'$

Gli istanti simultanei per **A** e **B** sono $(ct_2{}')/2$ e $ct_1{}'$

Gli assi spaziali rossi non sono paralleli a quelli neri!

Anche **A**da e **B**aldo devono sincronizzare i propri orologi come hanno fatto **A**nna e **B**iagio.
In base al secondo postulato la linea di universo della luce emessa dagli osservatori in moto dovrebbe essere tracciata con lo stesso angolo rispetto agli assi ct' e … x'
Le linee rosse tratteggiate sono le linee dei "tempi uguali" nel sistema rosso (in moto) e collegano eventi simultanei per gli osservatori rossi. Sono le linee lungo le quali essi misurano le distanze degli oggetti. La nozione di lunghezza presuppone quella di simultaneità: gli estremi di un oggetto si devono misurare nello stesso istante (altrimenti potrebbe muoversi tra una misura e la successiva).
Attenzione: gli assi spaziali neri e quelli rossi non sono paralleli, questo significa che gli eventi simultanei nel sistema nero non sono simultanei nel sistema rosso e viceversa!
La simultaneità è un concetto relativo: il fatto che due eventi avvengano o meno nello stesso istante dipende da quali osservatori li stanno misurando.

un solo spaziotempo per diversi sistemi inerziali



Durante il tempo t l'osservatore rosso percorre

$$x = vt$$

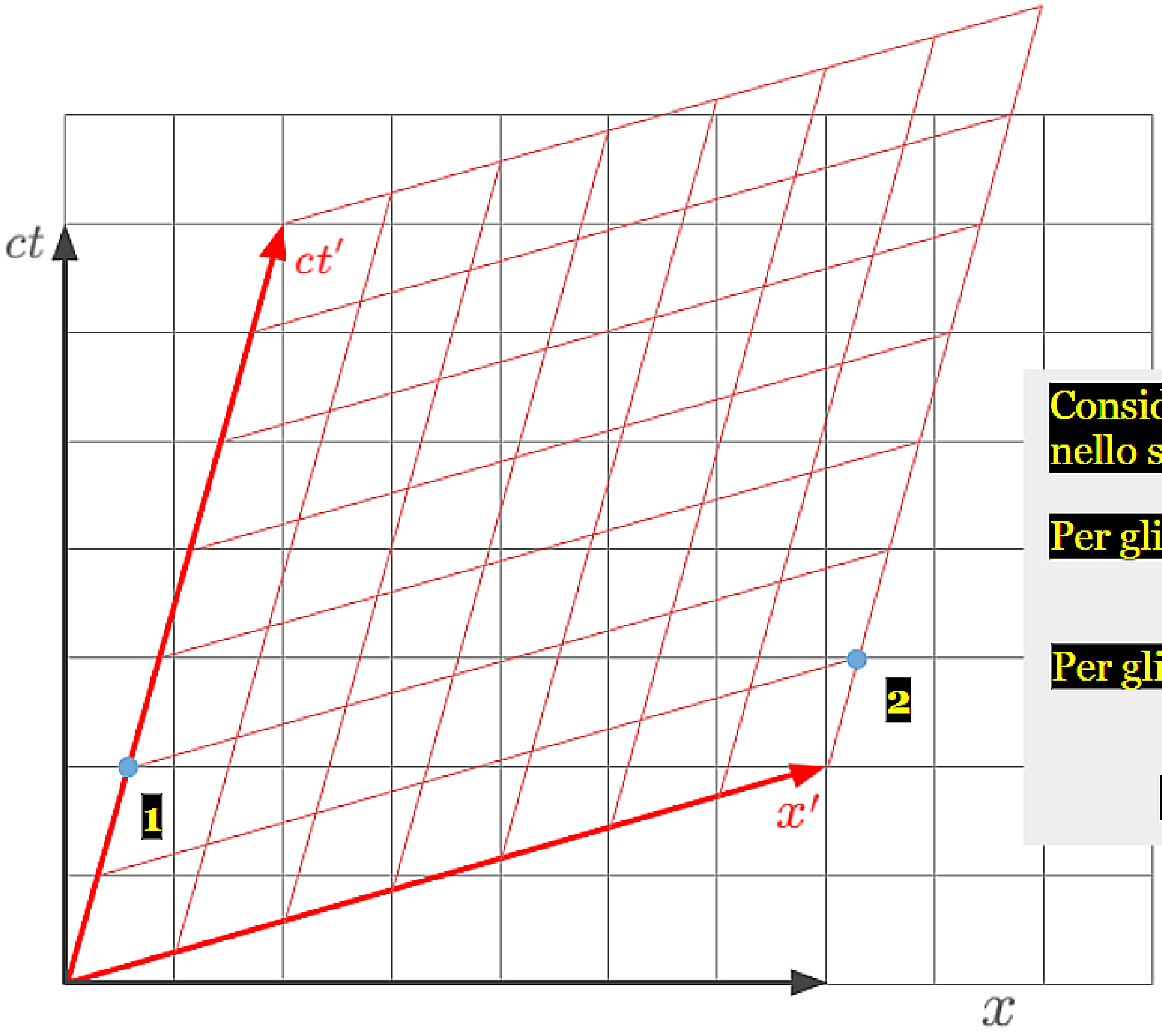
dividendo per ct

$$\frac{x}{ct} = \frac{v}{c} = \beta$$

si noti che $\beta = \tan\delta$

La griglia spaziotempo del sistema in movimento (rosso) è obliqua rispetto a quello fermo (nero): gli assi tempo e gli assi spazio dei due sistemi formano lo stesso angolo così come sono uguali gli angoli che formano con la linea di universo di un segnale luminoso. Quale scala si deve adottare per il sistema in movimento? Per farlo dobbiamo introdurre una misura quantitativa dell'inclinazione degli assi rossi.

la causalità nello spaziotempo 1/2



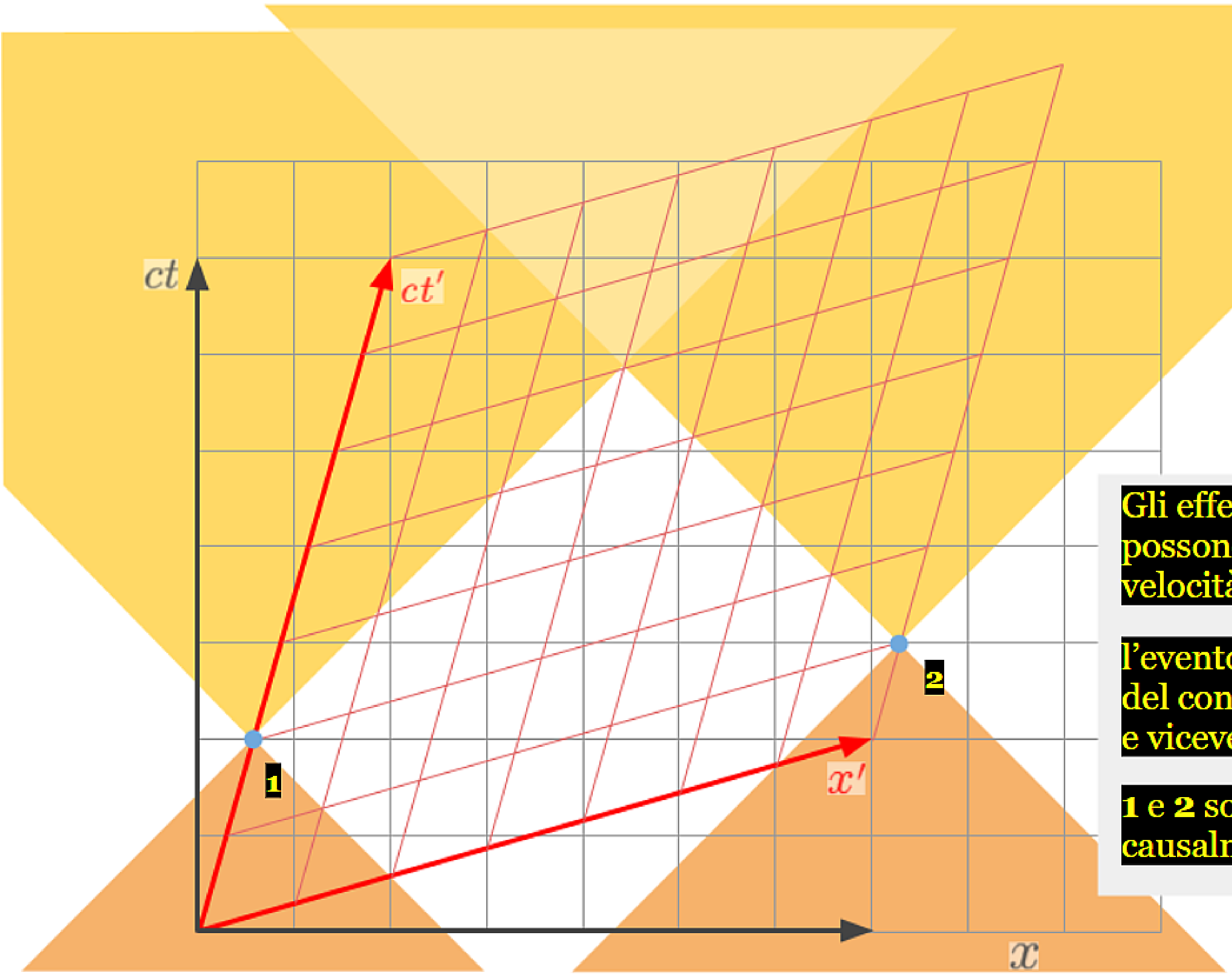
Consideriamo gli eventi nello spaziotempo **1** e **2**

Per gli osservatori **neri**
1 precede **2**

Per gli osservatori **rossi**
1 segue **2**

e la causalità?

la causalità nello spaziotempo 2/2

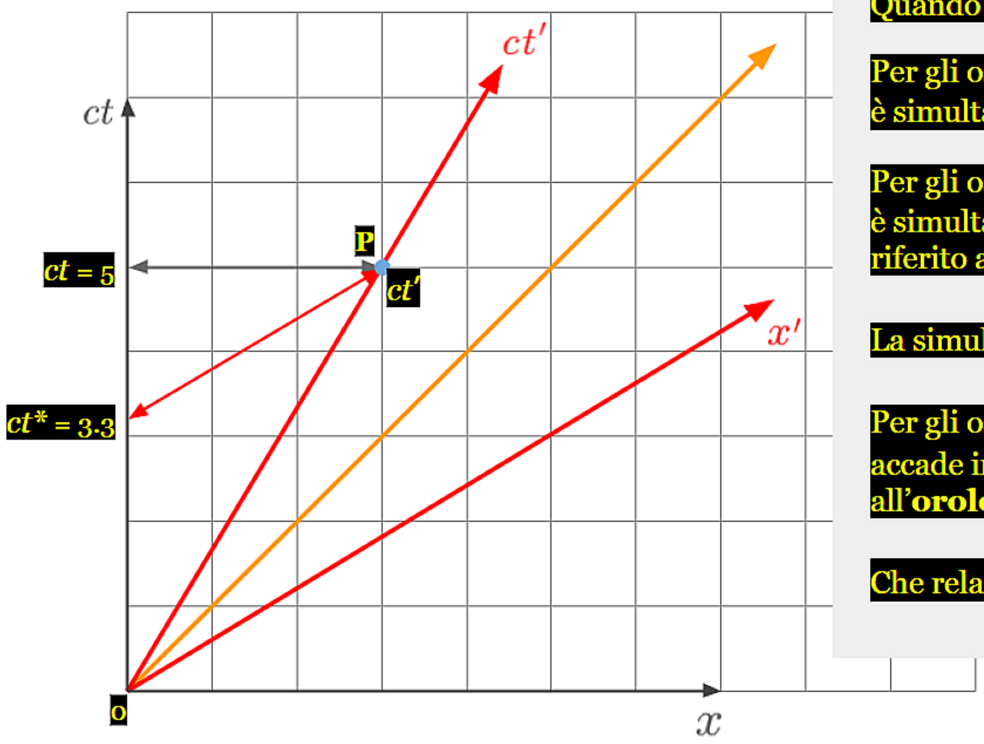


Gli effetti di un evento non possono propagarsi a una velocità superiore a c

l'evento **1** si trova al di fuori del cono luce dell'evento **2** e viceversa:

1 e **2** sono eventi causalmente disconnessi

La dilatazione dei tempi 1/3



Quando accade l'evento in P ?

Per gli osservatori **neri** l'evento è simultaneo a ct = 5 unità

Per gli osservatori **rossi** l'evento è simultaneo a ct^* = 3.3 unità riferito all'**orologio nero.**

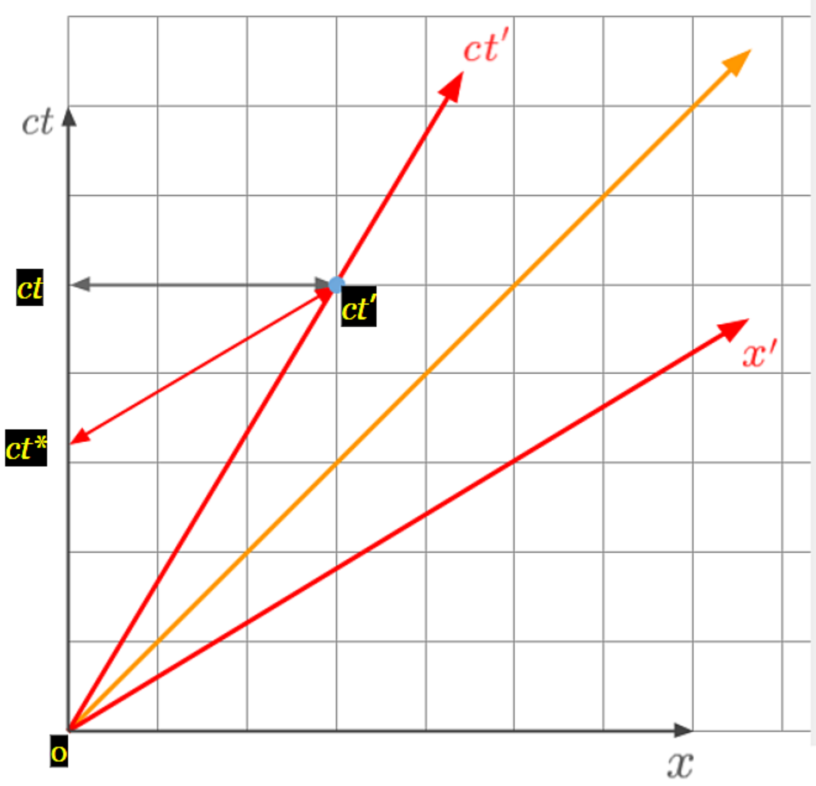
La simultaneità è relativa!

Per gli osservatori **rossi** l'evento accade in ct' rispetto all'**orologio rosso**.

Che relazione esiste tra ct e ct' ?

I due osservatori (nero e rosso) hanno con sé orologi identici, sincronizzati al valore zero nell'origine degli assi; ognuno misura il tempo nella propria linea di universo.
La simultaneità è relativa perciò quando osservatori inerziali diversi riferiscono un evento rispetto allo stesso orologio, troveranno tempi diversi.
Cerchiamo la relazione tra il tempo misurato da un osservatore con il suo orologio e quello misurato da un altro osservatore con un altro orologio.

La dilatazione dei tempi 2/3



Poniamo $ct' = \gamma\, ct^*$

Per la relativà: $ct = \gamma\, ct'$

Sostituendo: $ct = \gamma^2\, ct^*$

Quindi: $\gamma > 1$ e $ct > ct'$!!

L'orologio in movimento (**rosso**)
è più lento di quello fermo (**nero**)

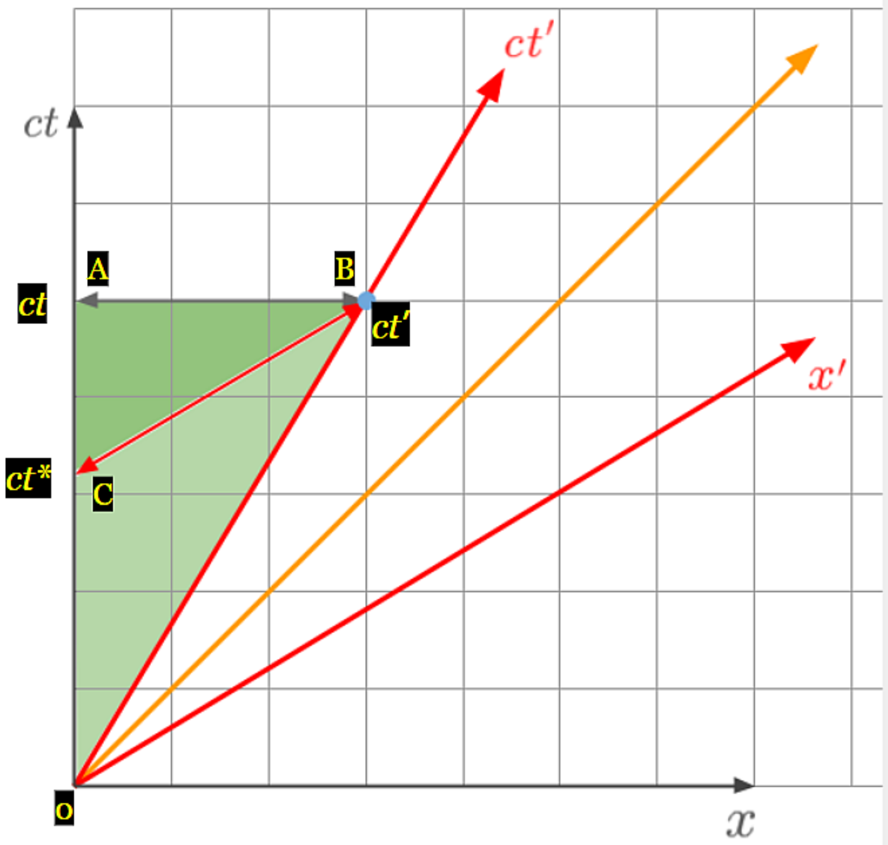
Di quanto ritarda?
dobbiamo trovare il valore di γ

Ipotesi: il ritmo dei due orologi differisce di un fattore γ (gamma) che dipende dalla velocità relativa v.

- L'evento per i **rossi** accade in ct' pari a gamma volte ct^* misurato dai **neri** con l'orologio **nero**.
- L'evento per i **neri** accade in ct pari a gamma volte ct' misurato dai **rossi** con l'orologio **rosso**.

Attenzione: potrebbe sembrare dalla figura che $ct < ct'$ e non che $ct > ct'$, questo significa che è necessario modificare la scala delle unità lungo gli assi obliqui del sistema di riferimento in movimento.

La dilatazione dei tempi 3/3



Troviamo il valore di γ

$ct = \gamma^2 ct^*$

Consideriamo i due triangoli simili ABO e ABC

Quindi: AB/AO = AC/AB

Notiamo che:

AB/AO = $x/ct = v/c$

AB = vt

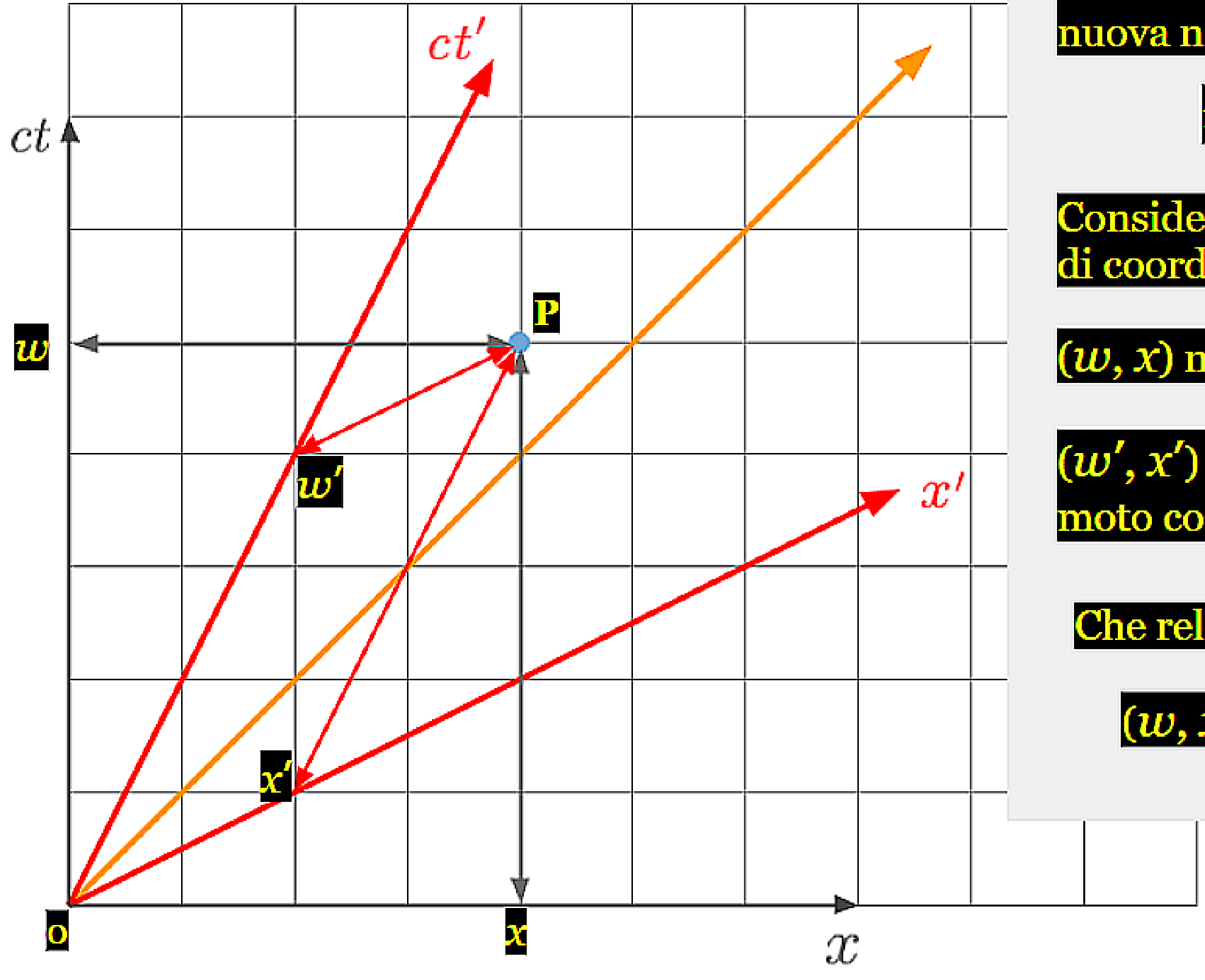
AC = $ct - ct^*$

Sostituendo e raccogliendo

$ct = ct^* / (1 - v^2/c^2)$

Per visualizzare la similitudine tra i triangoli è necessario traslare il triangolo ABC (piccolo) portando il vertice C sul vertice B.
Si utilizzi infine come asse di simmetria una retta perpendicolare al raggio di luce passante per B.
La geometria euclidea (le similitudini) continuano a valere anche se la scala degli assi obliqui (rossi) è diversa: è sufficiente scrivere la similitudine tra i lati dei triangoli riferiti allo stesso sistema di riferimento.

Le trasformazioni di Lorentz 1/2



Utilizziamo per comodità questa nuova notazione:

$$w = ct\,,\; w' = ct'$$

Consideriamo un evento **P** di coordinate:

(w, x) nel sistema **nero** (quiete)

(w', x') nel sistema **rosso** in moto con velocità $\beta = v/c$

Che relazione esiste tra

(w, x) ? (w', x')

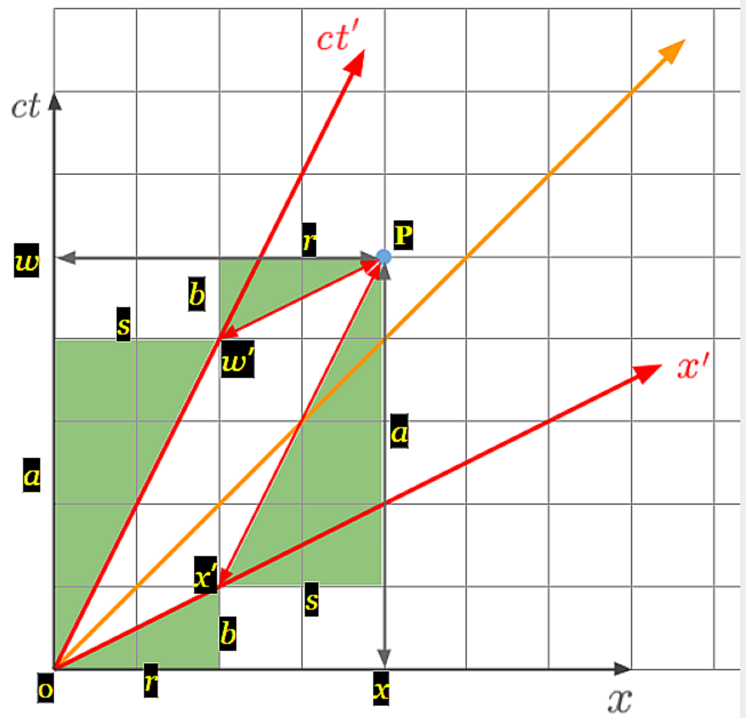
La *dilatazione* dei tempi

$$T = t'\gamma$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Albert Einstein

Le trasformazioni di Lorentz 2/2



Dai triangoli rettangoli abbiamo

$$\begin{cases} w = a + b \\ x = r + s \end{cases}$$

Osserviamo che

$$s/a = b/r = v/c = \beta$$

Abbiamo già dimostrato che

$a = \gamma\, w'$ perciò $r = \gamma\, x'$

sostituendo troviamo

$s = \beta\gamma\, w'$ e $b = \beta\gamma\, x'$

e infine otteniamo

$$\begin{cases} w = \gamma\, w' + \beta\gamma\, x' \\ x = \gamma\, x' + \beta\gamma\, w' \end{cases}$$

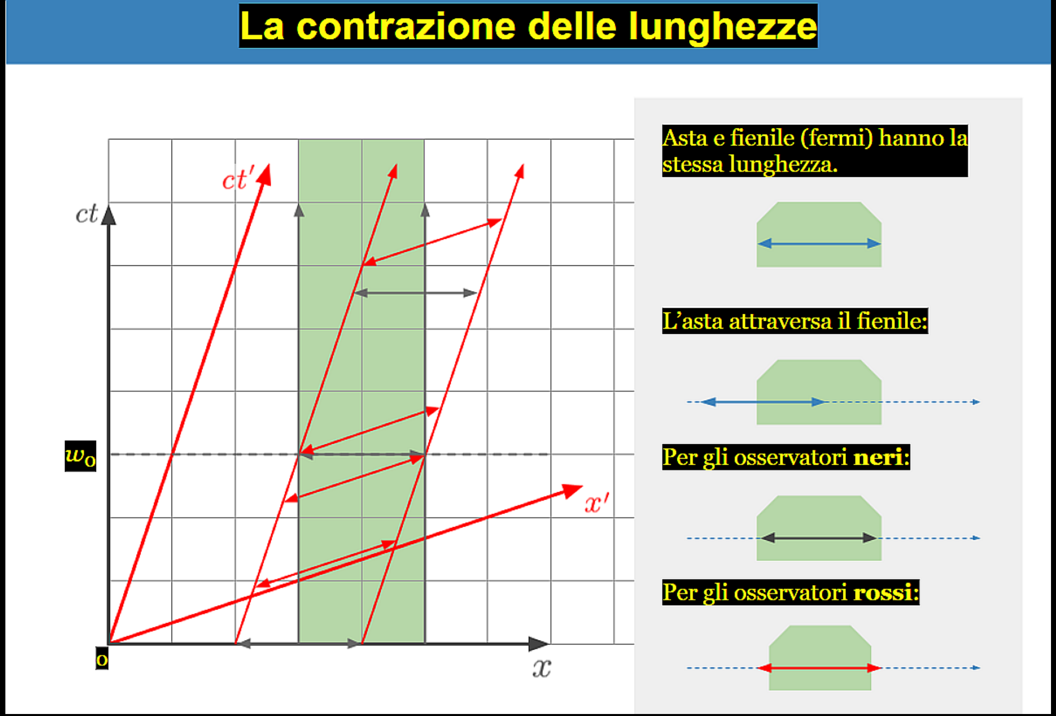
Nel triangolo verde più grande, il rapporto dei due lati perpendicolari s/a è pari alla distanza percorsa dal riferimento rosso, $s = vt$, divisa per la distanza percorsa dall'impulso luminoso nello stesso intervallo di tempo, $a = ct$. Tale rapporto, dunque, è pari a $v/c = \beta$, che è indipendente dalla scelta di un istante particolare.

Queste regole di trasformazione godono di una proprietà matematica: sono lineari.

I valori di w e x sono espressi come combinazioni lineari dei valori w' e x'. I coefficienti β e $\beta\gamma$ dipendono dalla velocità relativa dei due osservatori.

Il limite non relativistico (per $v \longrightarrow 0$, allora $\beta \longrightarrow 0$ e $\gamma \longrightarrow 1$) coincide con le trasformazioni di Galileo: $w = w'$ e $x = x' + \beta w'$

Le trasformazioni di Lorentz erano state enunciate intorno al 1900 prima della formulazione della relatività. Lorentz le aveva ottenute analizzando la teoria di Maxwell scoprendo che se si cambiano le coordinate, passando dalle variabili con apici a quelle senza apici usando le "sue" trasformazioni, le equazioni di Maxwell restavano assolutamente identiche (erano invarianti).



Il paradosso dell'asta e del fienile

Le trasformazioni di Lorentz oltre alla dilatazione dei tempi prevedono anche la contrazione delle lunghezze. In poche parole, la misura della lunghezza di un oggetto che si muove con velocità costante risulterà contratta (nella direzione del moto) vista da un osservatore in quiete. La contrazione è pari a un fattore gamma: $x = x'/\gamma$.

Il sistema di riferimento nero è in quiete. L'area verde chiaro è il fienile, fermo; le due frecce nere verticali corrispondono alle linee di universo rispettivamente della porta anteriore e posteriore del fienile.

La pertica, rappresentata dalla freccia a due punte, si muove a velocità costante ed è a riposo nel sistema di riferimento rosso. Le due frecce diagonali rosse rappresentano le linee di universo delle due estremità dell'asta.

Nel sistema di riferimento nero la lunghezza viene misurata lungo le linee orizzontali corrispondenti a tempi uguali: le estremità dell'asta risultano contenute nel fienile nell'istante w_0 .

Per gli osservatori rossi, all'istante w_0 , quando l'estremità anteriore dell'asta raggiunge il fondo del fienile, l'altra estremità non è ancora entrata.

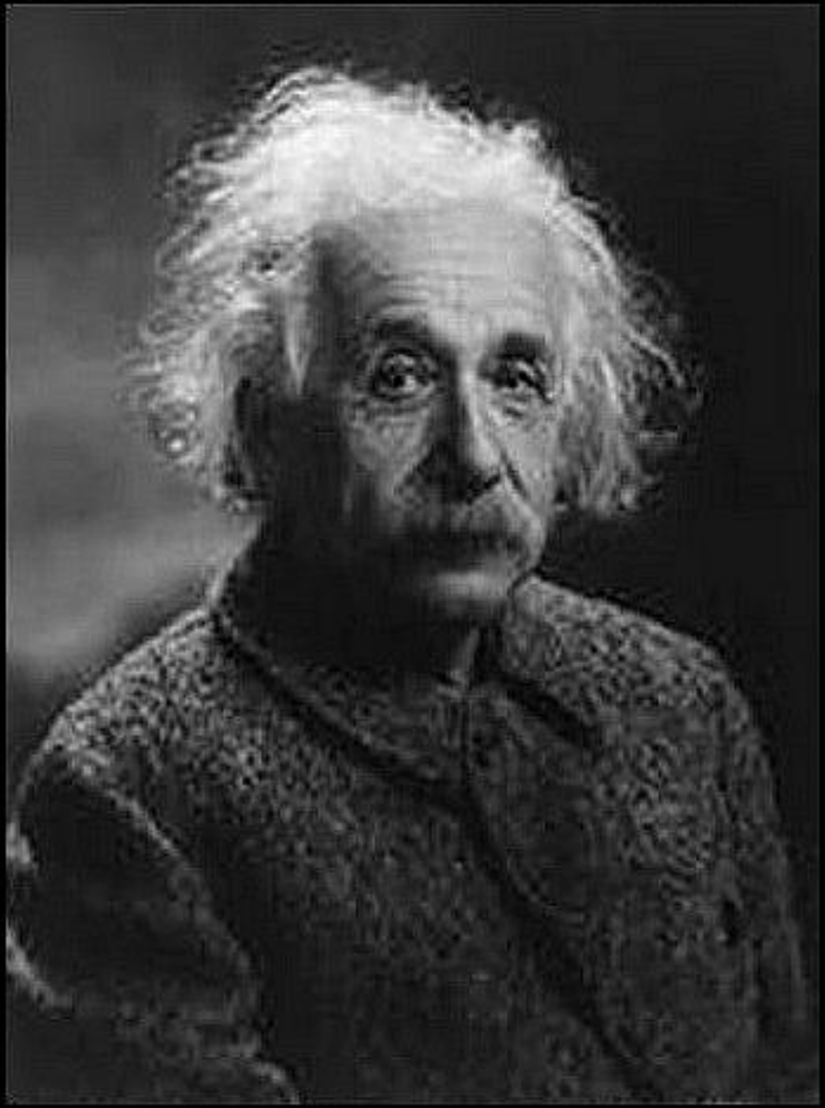
L'osservatore rosso osserva che l'asta è troppo lunga per entrare tutta nel fienile.

L'asta entrerà nel fienile? chi ha ragione?

Le misure di lunghezza, per definizione, devono avvenire simultaneamente ma la simultaneità dipende dal sistema di riferimento!

La risposta alla domanda è: dipende! dipende dall'asta e dipende dall'osservatore.

La *contrazione* delle lunghezze

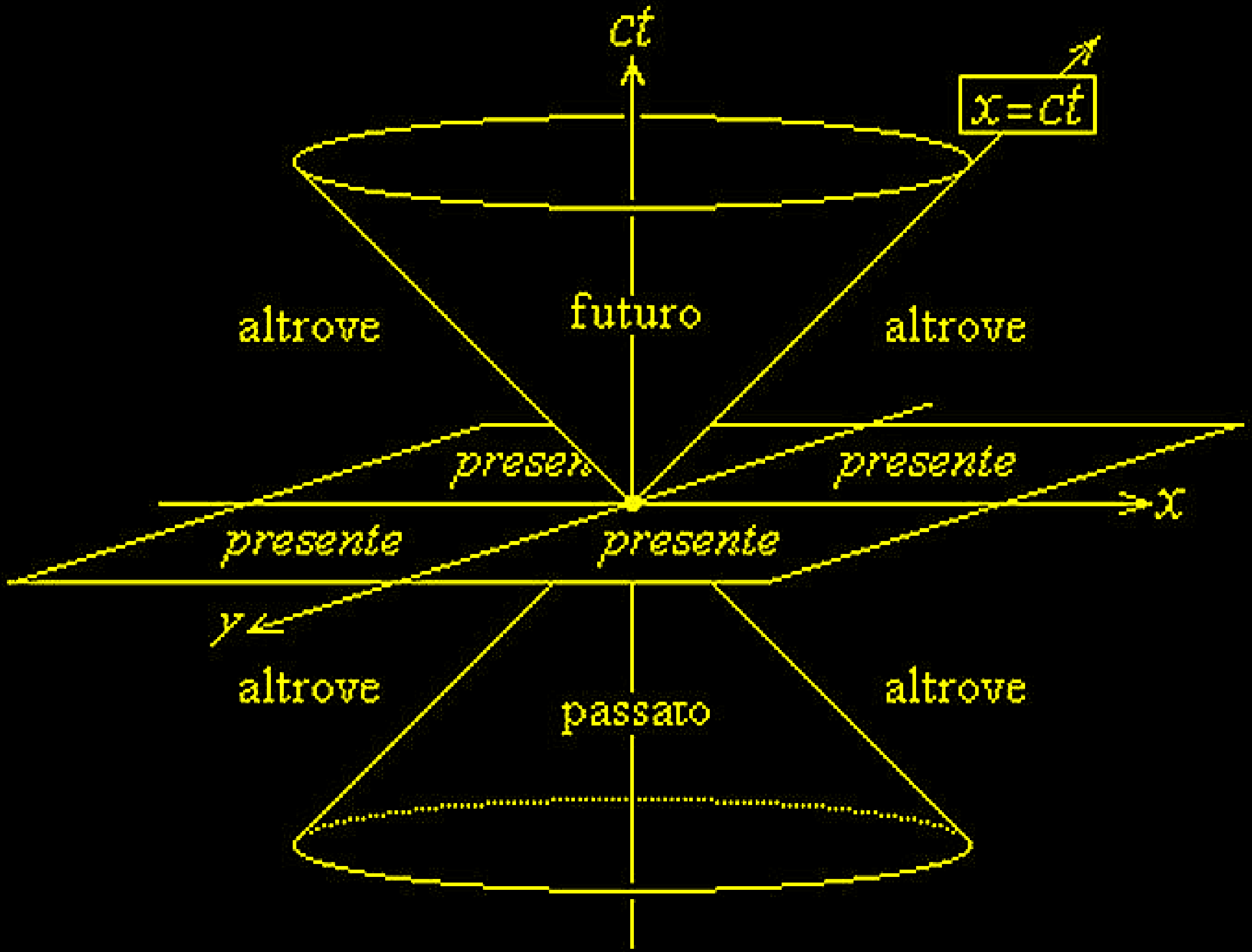


$$D = d'\gamma$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Albert Einstein

L'invarianza dell'intervallo spazio-temporale di Minkowski



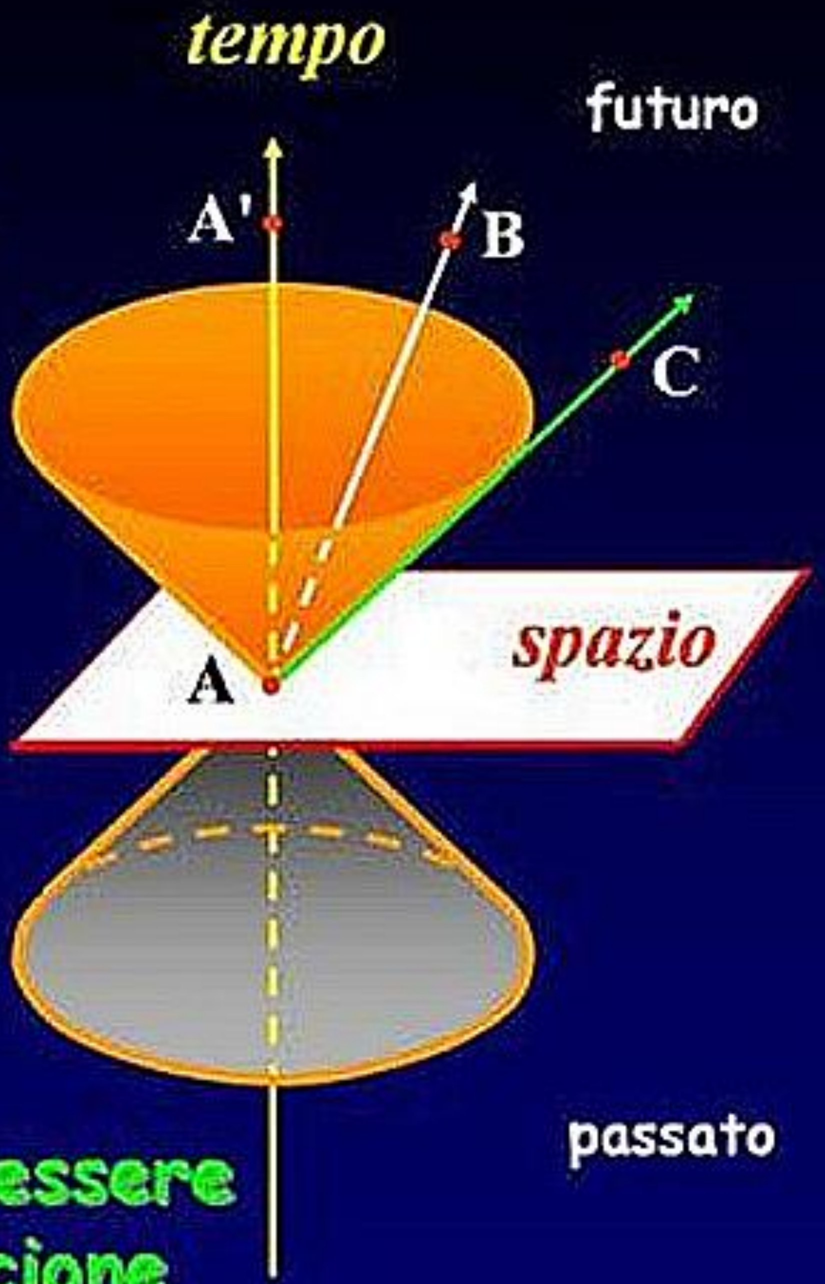
Cono di Luce

Il cono in alto rappresenta il possibile futuro nello Spazio-Tempo

Il punto A' rappresenta il futuro di A senza alcun movimento nello spazio

Il punto B rappresenta il futuro di A in movimento ad una certa velocità

Il punto C rappresenta il futuro di A in movimento alla velocità della luce



A NON può muoversi verso il passato

Tutto il futuro di A deve essere contenuto nel cono arancione

Osservazioni conclusive

- Nel 1905, il tempo era ormai maturo per la nascita della Relatività Speciale. Fin dai tempi di Maxwell i migliori scienziati discutevano sull’etere e la velocità della luce.
- Alcuni, per amore di polemica, dicono che lo scopritore della relatività fu Poincaré, subito prima di Einstein.
- In realtà Poincaré sostenne sempre l’esistenza dello spazio assoluto (anche se non poteva essere identificato) ed inoltre ragionava su modelli fisici particolari (ad esempio, la materia è formata da elettroni sferici piuttosto che ellittici…).
- Einstein usò invece ragionamenti puramente geometrici, di validità generale e di stile filosofico.
- Einstein portò all’estremo il suo stile di ragionamento, che dava molta importanza alla intuizione ed alla creatività, arrivando alla titanica teoria della Relatività Generale (RG) nel 1915.
- L’unica sconfitta di Einstein fu contro la nascente Meccanica Quantistica (MQ). Tuttora RG e MQ sono due teorie irriducibili.