



Università "Cardinale Giovanni Colombo" - Milano
A.A. 2024 - 2025

Corso di Astrofisica
Docente: **Adriano Gaspani**

Lezione 10

Materia Oscura ed Energia Oscura

Il punto di partenza

Teoria della Relatività Generale

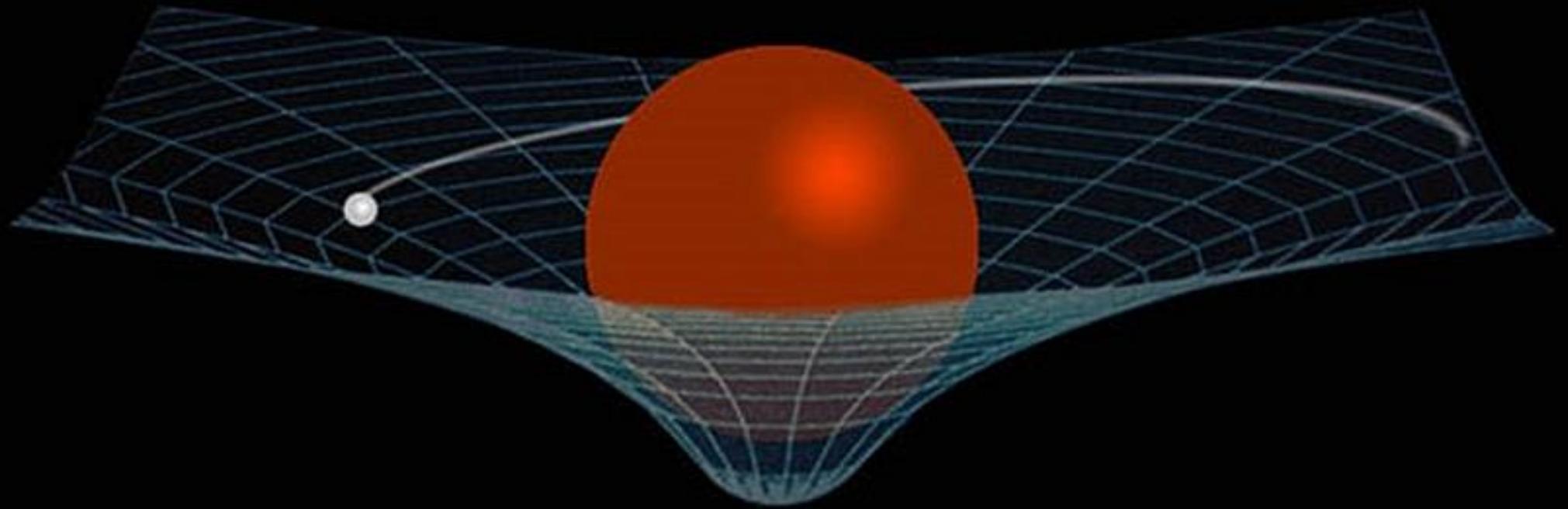
Equazioni di Einstein 1915

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

Geometria

Materia-Energia

Curvatura dello Spazio-Tempo

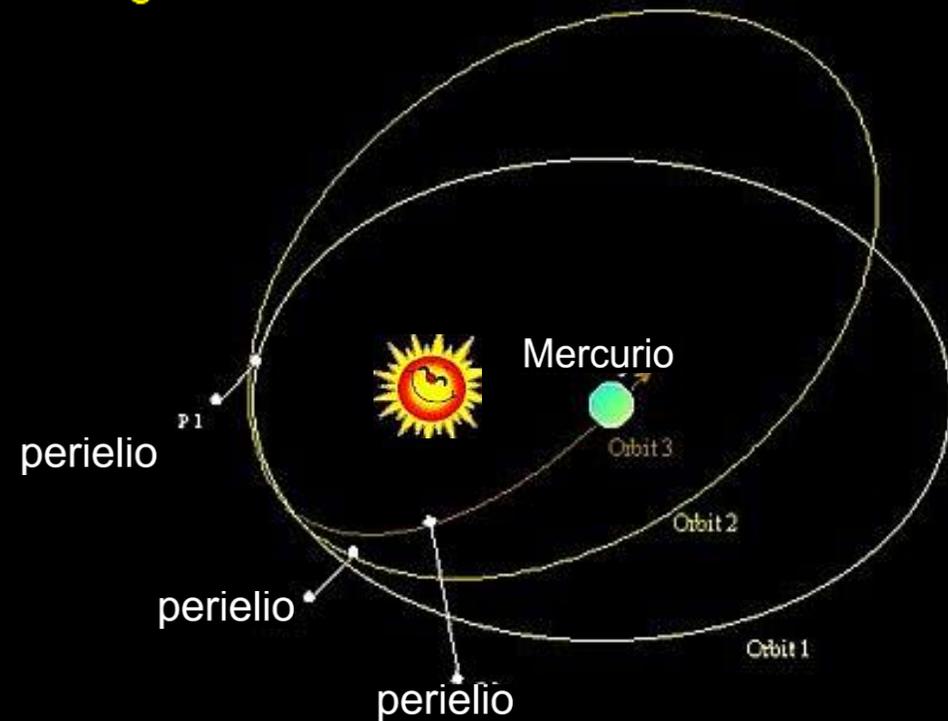


Prodotta da una massa a
simmetria sferica

Grandi successi della Teoria

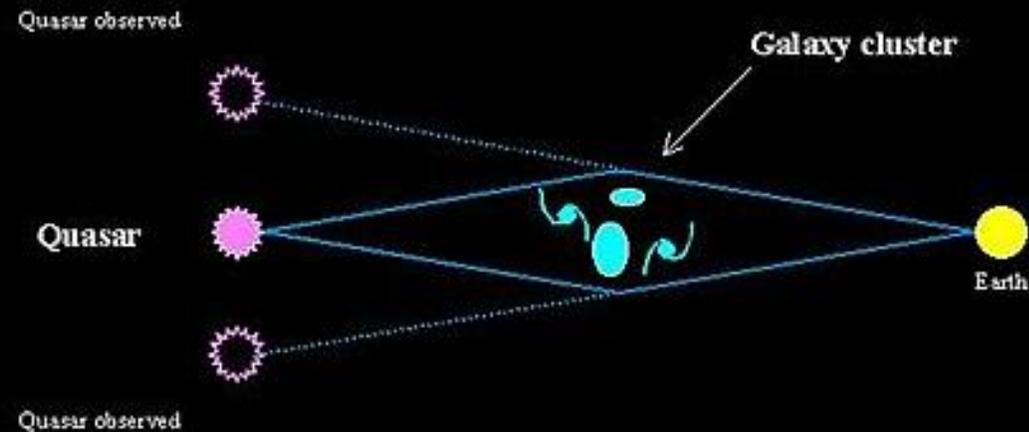
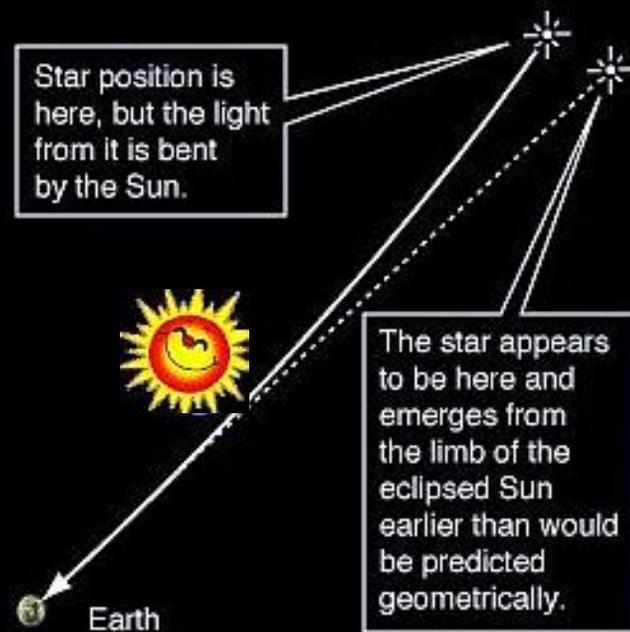
1. Avanzamento del perielio Mercurio

$$\delta\phi = \frac{6\pi GM}{c^2 r_0}$$



Grandi successi della Teoria

2. Deflessione dei raggi luminosi



“Ma anche” Una Teoria per l’Universo

La **Teoria della Relatività Generale** rendeva possibile la formulazione di un:

Modello Cosmologico per il nostro Universo.

Ai tempi di Einstein si credeva che l’Universo fosse **statico**.

Però: le soluzioni che Einstein trovava **non avevano questa proprietà**.

Egli si accorse che era possibile **modificare le equazioni introducendo un termine** che, pur **non entrando in conflitto con i principi generali della teoria** e pur **non cambiando le predizioni di quest’ultima sulle distanze planetarie**, permetteva di ottenere un **modello statico per l’Universo**. Questo termine aggiuntivo, che prese il nome di “**Costante Cosmologica**”, fornisce un **contributo addizionale all’energia dell’universo**, un contributo che non proviene **né dalla materia né dalla radiazione**.

Equazioni di Einstein modificate

Ed eccole le Equazioni modificate dallo stesso Einstein, aggiungendo il **Termine Cosmologico**, per poter ottenere un **Universo Statico**

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

Cerchiato in **rosso** il **Termine Cosmologico**. Questo termine porta al nostro Universo un **contributo di energia** che non proviene **né dalla radiazione né dalla materia** in esso presenti; un contributo di energia strano, inatteso, «**oscuro**». Un contributo di

«Energia Oscura».

Facciamo un passettino indietro

Fisici ed astronomi tentavano di costruire una cosmologia **secondo la fisica e le idee di Newton**, secondo il quale l'Universo ha una **distribuzione infinita e omogenea** di materia. L'astronomo Hugo Seeliger, nel 1894, mostra che, **se la distribuzione di materia è infinita la forza gravitazionale che ne risulta è indeterminata !!!!**

Seeliger propone 2 possibili soluzioni:

- 1) L'Universo **non contiene una distribuzione infinita di materia**. Ma questa è una soluzione insoddisfacente : **una distribuzione finita di stelle in uno spazio infinito tende a disperdersi a causa dei moti casuali delle stelle !**
- 2) Su **scale cosmologiche**, la **legge di gravitazione universale di Newton** potrebbe essere **modificata**. Seeliger mostra che una **piccola deviazione dal comportamento newtoniano** della gravità rende possibile l'esistenza di una **distribuzione infinita di materia senza cadere nelle contraddizioni di cui abbiamo parlato prima**.

e Einstein ???

Einstein conosce questi lavori di Seeliger e conosce anche il punto di vista di Mach.

Principio di Mach

Secondo Mach : il moto di un qualsiasi corpo è dovuto all'azione di tutto il resto della materia nell'Universo. In particolare, l'inerzia di un corpo (massa inerziale) doveva provenire dalla interazione del corpo col resto dell'Universo.

Einstein chiama questo : **Principio di Mach**

Einstein pensava che questo principio fosse automaticamente incorporato nelle Equazioni della Relatività Generale.

Ma allora.....

anche la teoria dell'intero universo **deve obbedire al Principio di Mach.**

In particolare :

Non devono esistere soluzioni delle equazioni di Einstein che **descrivono Universi vuoti**, cioè privi di materia e di energia.

Inoltre : visto che l'inerzia dei corpi doveva essere dovuta alla utua interazione tra le Masse dei corpi, **l'Universo doveva contenere una quantità finita di materia** e avere un **volume finito** a meno di non volere ottenere risultati assurdi.

Nell'articolo del 1917

“**Considerazioni Cosmologiche sulla Teoria della Relatività Generale**”

Einstein mostra che :

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

- Il **Termine Cosmologico** è in **accordo col Principio di Mach** ;
- Le equazioni, con l'aggiunta della Costante Cosmologica, consentono di ottenere un **modello di Universo** :

Statico ; Finito ; Libero dalle contraddizioni dei modelli newtoniani.

Tutto bene allora per il Modello di Einstein ?

Il Modello è In Buona Salute ?

... Eh ... insomma ... **Poco dopo** che Einstein aveva pubblicato il suo lavoro
De Sitter dimostra che se le Equazioni di Einstein vengono modificate con
l'aggiunta di $\Lambda g_{\mu\nu}$

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

Queste equazioni ammettono soluzioni **anche in assenza di materia!**

... **esiste una densità di energia** (...oscura)

**Ahi!!! Duro colpo!!! Questo sembra sconfiggere il
Principio di Mach!!!**

Einstein pensava che la **curvatura dello Spazio-Tempo**
fosse legata alla **presenza di materia**, invece de Sitter
mostrava che **anche in assenza di materia** si aveva
una curvatura dello Spazio-Tempo
...perché?

Equazione di Einstein classica:

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^2} T_{\mu\nu}$$

Equazione di Einstein modificata:

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^2} T_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu}$$

Λ = costante cosmologica

La pressione p sarà quindi:

$$p = - \rho_{\Lambda} c^2$$

che essendo negativa è
antigravitazionale

...fa espandere l'Universo.

Tensore di Stress-Energia

simmetria sferica

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}$$

ρ = densità di massa (massa/volume) oscura...

ρc^2 = densità di energia (Energia/volume) oscura...

τ = tensione radiale

p = pressione laterale

.....Ma c'è di più

Hermann Weil dimostra che :

Nell'Universo di **de Sitter** si doveva osservare un **Effetto Doppler** per gli oggetti distanti, cioè uno **spostamento verso il rosso** della luce emessa da oggetti distanti.

Attenzione:

l'**Universo di de Sitter** può essere una **buona approssimazione** al nostro **Universo reale** se la **densità di materia ed energia** è **piccola** rispetto alla **costante cosmologica**.

Slipher (astronomo) tra il 1912 e il 1917 **Osserva** :
Nebulose lontane mostrano **spostamento verso il rosso** della **luce emessa !!**

Weil nota : lo “**spostamento verso il rosso**” osservato da Slipher **si spiega bene** con il **Modello di de Sitter !!**

Einstein 1923 :

“**Se l’Universo non è statico, al diavolo il termine cosmologico**”.

.....si trovano nuove soluzioni delle equazioni di Einstein che descrivono Modelli di **Universo Non Statico**

⇒ 1) Alexandr **Friedman** (1922-1924) mostra : se l'Universo contiene una **distribuzione omogenea di materia**, **senza costante cosmologica**, lo spazio si deve **espandere** o contrarre.

⇒ 2) Georges **Lemaitre** (1927) : trova analogo risultato anche **con costante cosmologica diversa da zero**.

⇒ Inoltre : **Nel 1929** le **osservazioni di Hubble** mostrano che le **galassie si allontanano l'una dall'altra con velocità che cresce proporzionalmente alla distanza** :

$$v = H \cdot d \quad (H = \text{Costante di Hubble})$$

Lo Spazio si Espande !!!!!!!!

Equazioni di Friedmann

$$\dot{a} = \left[a^2 \frac{8\pi G \rho + \Lambda c^2}{3} - k c^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + \frac{3p}{c^2} \right) a + \frac{\Lambda c^2}{3} a$$

a = Raggio dell'Universo (fattore di scala)

\dot{a} = Velocità di espansione

\ddot{a} = Accelerazione dell'espansione

ρ = Densità media della materia

p = Pressione

c = Velocità della luce

G = Costante di Gravitazione Universale

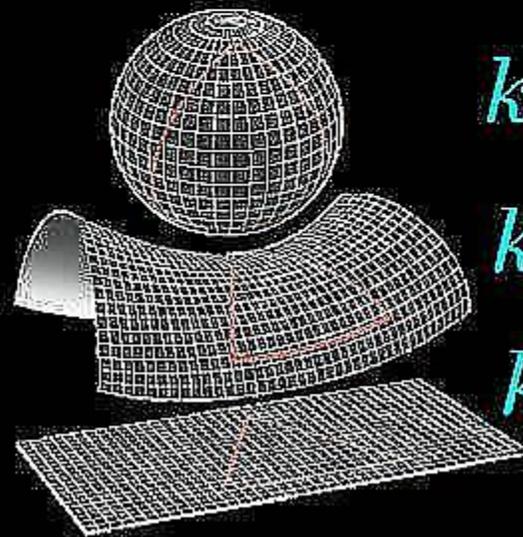
Λ = Costante cosmologica

k = Parametro di curvatura



Aleksandr Aleksandrovič Friedmann

(San Pietroburgo, 6 giugno 1888 –
Pietrogrado, 16 settembre 1925)



$k=+1$

$k=-1$

$k=0$

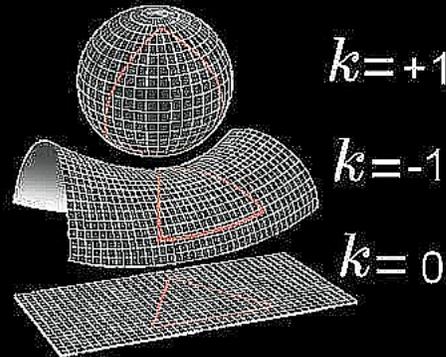
Modelli di Friedmann

Modello chiuso (1922)

Curvatura: $K = +1$
Densità di materia = variabile
Pressione = 0
Costante cosmologica: = 0
Dinamica : espansione - contrazione

Modello aperto (1924)

Curvatura: $K = -1$
Densità di materia = variabile
Pressione = 0
Costante cosmologica: = 0
Dinamica : espansione perpetua



La fine del modello statico di Einstein : 1930, Arthur Eddington mostra che il modello di Einstein, **era statico** ma **altamente instabile** :

anche una **piccola perturbazione nella distribuzione di energia e di materia** lo faceva **precipitare verso l'espansione o la contrazione.....**

quindi...

Einstein abbandona l'idea di Universo Statico :
l'Universo si espande.

Facciamo il punto : **Siamo agli inizi degli anni 30**

Modello di Friedmann (ottimo candidato per descrivere l'Universo intero)

- **“la curvatura dello spazio”** dipende dalla **densità di materia ed energia** nell'Universo.
- Se la densità di energia è pari ad un certo valore, **densità critica**, allora **lo spazio è piatto**. Altrimenti, **lo spazio è curvo**.

Misure di de Sitter : **“contando” le galassie** osservate in regioni diverse dell'Universo, trova che la densità di materia ed energia dell'Universo è proprio quella critica.

→ **Il modello che si afferma è questo (Modello di Einstein-de Sitter) :**

- Universo riempito di Energia, di Materia e con Costante Cosmologica nulla ;**
- Densità di Energia e Materia pari alla densità critica ;**
- Geometria dello spazio grande scala : Euclidea (Universo piatto !)**

È il modello che è stato considerato dai fisici per molti decenni.

Modello di Einstein - De Sitter

(1932)

Curvatura: $K = 0$ (piatto Euclideo)

Densità di materia = variabile

Pressione = 0

Costante cosmologica = 0

Dinamica: espansione perpetua decelerata

E la Costante Cosmologica che fine fa?

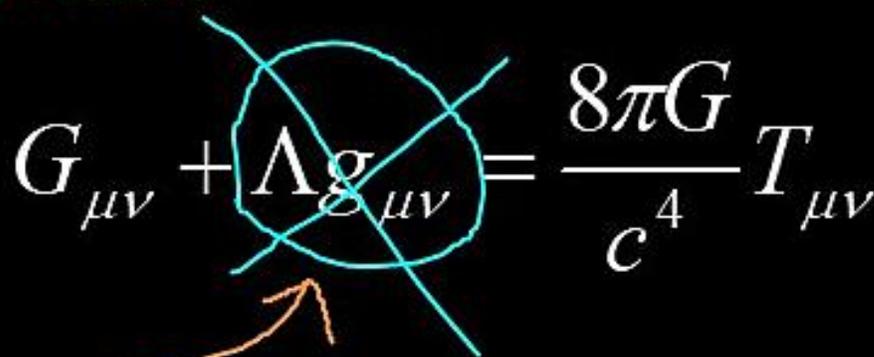
Pare che della Costante Cosmologica non ci sia più bisogno. **Einstein si pentì di averla introdotta.** Sentite che cosa scrive nel libro “**Il significato della relatività**” (1945): “**l’introduzione di un termine cosmologico** nelle equazioni della gravità, seppure possibile dal punto di vista della relatività, **è da rigettarsi sul piano della semplicità logica.** ...**Se la legge di espansione di Hubble fosse stata nota all’epoca della creazione della teoria della relatività generale, il termine cosmologico non sarebbe mai stato introdotto**”

$$G_{\mu\nu} + \cancel{\Lambda g_{\mu\nu}} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

A Georges Lemaitre, nel 1947, Einstein scrive: “**Da quando ho introdotto questo termine ho sempre avuto la coscienza sporca Sono incapace di credere che una cosa talmente brutta si realizzi in natura.**”

Georges Gamow racconta che Einstein un giorno gli disse che avere introdotto la Costante Cosmologica nelle meravigliose equazioni della relatività generale era stato **il più grande abbaglio della sua vita !**

Era dunque la fine del **Termine Cosmologico** ?


$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

Storia dell'Universo dalla Equazione :

$$G_{\mu\nu} + \cancel{\Lambda g_{\mu\nu}} = \frac{8\pi G}{c^4} \cdot T_{\mu\nu}$$

Geometria **Materia-Energia**



$$R(t) = R_{oggi} \cdot \sqrt{\frac{t}{t_{oggi}}}$$

$R(t)$ = “**Raggio dell'Universo**” all'istante t .

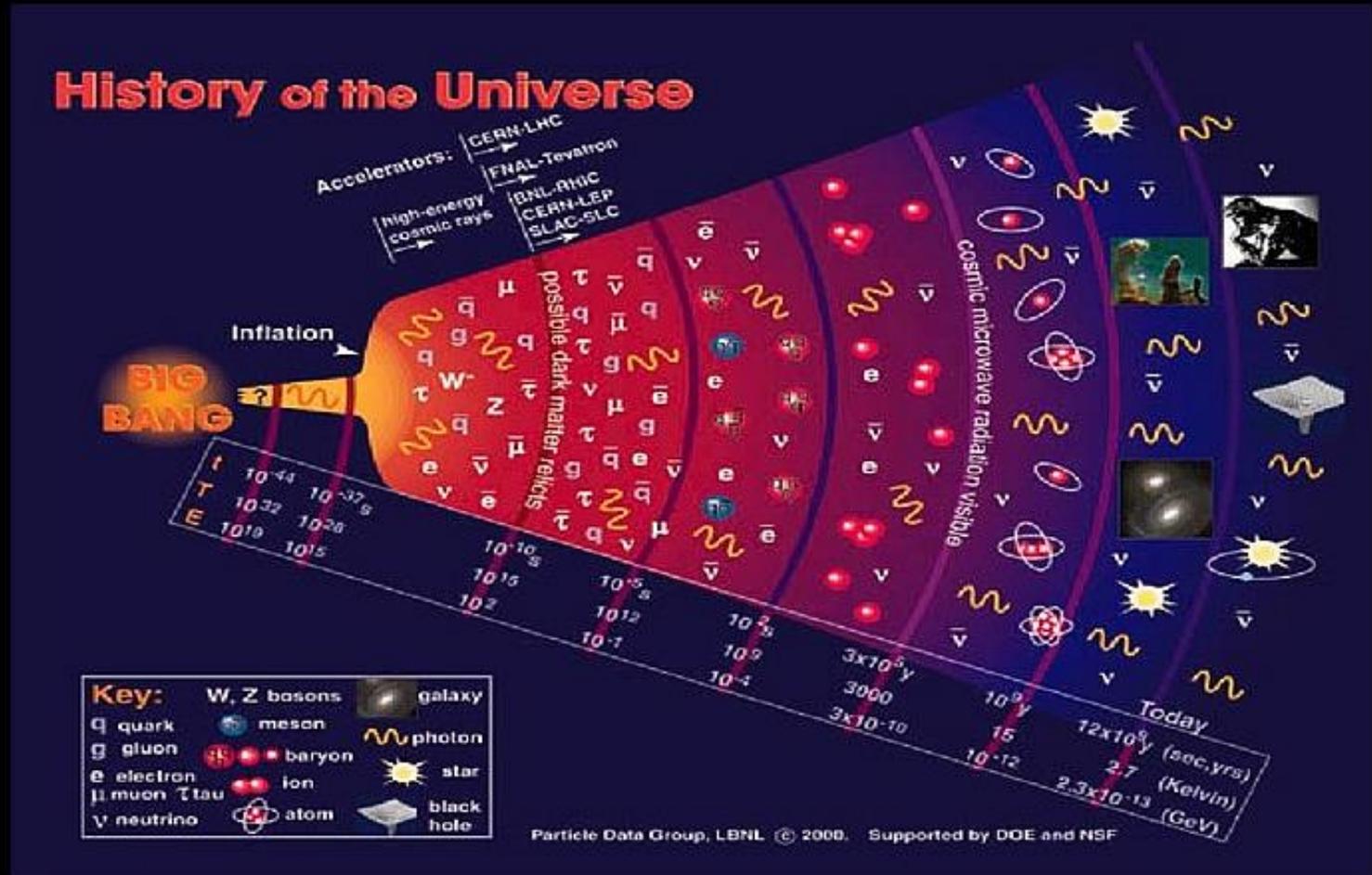
Che cosa succede a $t=0$??

Risposta : **$R(t=0) = 0$** ⇒ **Big – Bang !**

Storia dell'Universo

Sempre con

$$G_{\mu\nu} + \cancel{\Lambda g_{\mu\nu}} = \frac{8\pi G}{c^4} \cdot T_{\mu\nu}$$



Ma la **Cosmologia Osservativa** che cosa doveva fare dagli anni 30 in avanti?

- Abbiamo imparato la **Legge di Hubble**, che ci fornisce la velocità di allontanamento tra due galassie all'aumentare della distanza ($H = \text{costante di Hubble}$):

$$v = H \cdot d$$

- Nel modello di **Einstein – de Sitter**, la **densità** era esattamente pari al **valore critico** (quello per cui lo spazio è piatto):

$$\rho = \rho_{crit} = \dots$$

Il programma era chiaro:

si dovevano migliorare la **misura della costante di Hubble (H)** e la **misura della densità media dell'universo (ρ)**. Così si sarebbe **confermato oppure sconfessato**:

il Modello di Einstein – de Sitter.

...e i cosmologi osservativi questo fanno...

...e confermano (fino all'altro ieri) il **modello di Einstein – de Sitter**

I teorici, dal canto loro, aggiungono un altro importante tassello **INFLAZIONE**

(Alan Guth, Andrei Linde, Paul Steinhardt)

Perché l'Universo divenisse "omogeneo su larga scala" e "piatto", che è quel che osserviamo, occorre condizioni iniziali, cioè condizioni al momento del Big Bang, "molto speciali". L'inflazione fornisce un meccanismo dinamico che porta l'universo a queste condizioni in maniera assolutamente naturale.

D'altra parte, visto che

l'equazione che descrive l'Universo è

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} \cdot T_{\mu\nu}$$

i fisici si arrovellavano per capire quale fosse la ragione profonda per cui **la Costante Cosmologica, questa strana, Oscura forma di Energia** dovesse essere nulla:

$$\Lambda = 0$$

Una qualche simmetria della Natura ???

Ma... come spesso accade... il diavolo ci mette la coda ...

...e “il diavolo si traveste da

Meccanica Quantistica

A causa della **natura intrinsecamente quantistica** delle leggi che regolano l'Universo, **anche in assenza di materia, lo spazio non è “vuoto”**. Al contrario, esso risulta riempito da una sorta di energia residua detta **“Energia di Punto Zero”**.

Nel 1967, Zeldovich osserva che questa energia dovrebbe dare il suo contributo al **Termine Cosmologico** Λ .

Che cosa stiamo dicendo? Contributo a Λ ?

Ma quanto grande è questo contributo?

$$\left[G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \right]$$

Orrore ! 120 ordini di grandezza più grande del limite

sperimentale che ci dice che Λ è compatibile con zero !!!

... i fisici comunque pensano che...

ci deve essere un meccanismo, una simmetria della Natura, qualcosa insomma che ci permetterà di capire perché questo contributo enorme al Termine Cosmologico in realtà non dà contributo per nulla E lavorano tantissimo su questo terreno, fiduciosi che la soluzione si troverà

1998 (Perlmutter, Rees) : **dall'osservazione della luminosità** di certe esplosioni stellari (**supernovae**) in galassie distanti, gli astrofisici hanno potuto stabilire che: **l'espansione dell'Universo è accelerata !**

Così abbiamo la **prova provata** che :

$$G_{\mu\nu} + \cancel{\Lambda g_{\mu\nu}} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad \rightarrow \quad G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

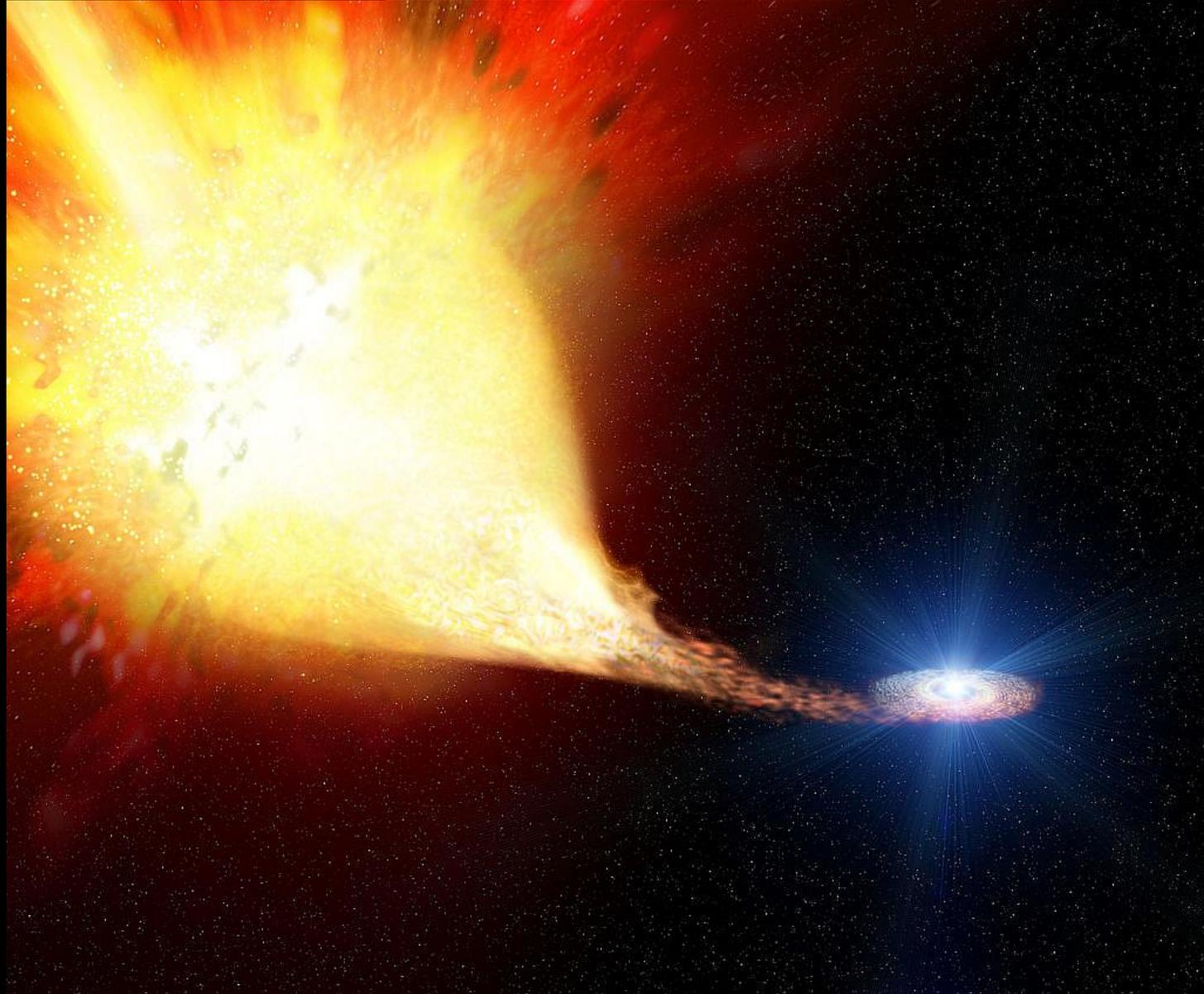
Agente responsabile di tale accelerazione **un termine del tipo** Λ ,
il nostro buon vecchio **Termine Cosmologico**, ovvero :

Energia Oscura

Supernovae di tipo Ia

Le supernovae di tipo Ia (SN Ia) sono sistemi stellari binari che contengono una nana bianca e una gigante rossa. La nana bianca è stabile finché la sua massa rimane inferiore alle $1.4 M_{\odot}$. La nana bianca sottrae materia alla gigante rossa e aumenta progressivamente la sua massa. Quando viene superato il Limite di Chandrasekar pari a $1.4 M_{\odot}$ la nana bianca esplose (supernova) emettendo una grande quantità di energia. Siccome le nane bianche si somigliano tutte, quando esplodono producono la stessa quantità di energia.

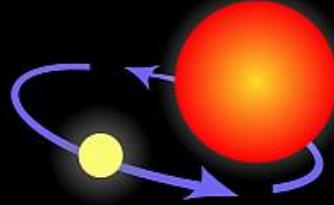
Supernova di tipo Ia



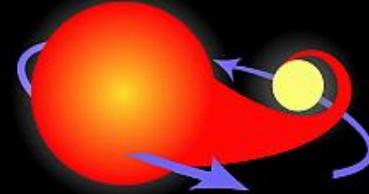
Come si forma una supernova di tipo Ia



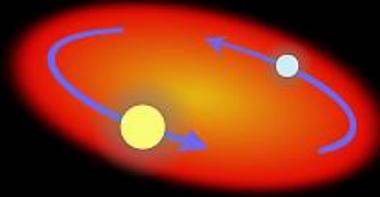
Due stelle normali si trovano in un sistema binario.



La più massiccia si evolve e diviene una gigante rossa...



...che accresce gas sulla compagna, ingrandendola e al tempo inglobandola.



La compagna e il nucleo della gigante spiraleggiano verso il centro dell'involucro gassoso.



L'involucro è espulso, mentre la separazione tra nucleo e compagna diminuisce.



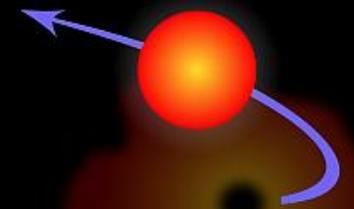
Il nucleo collassa in una nana bianca.



La compagna evolve in gigante, accrescendo materiale sulla superficie della nana bianca.

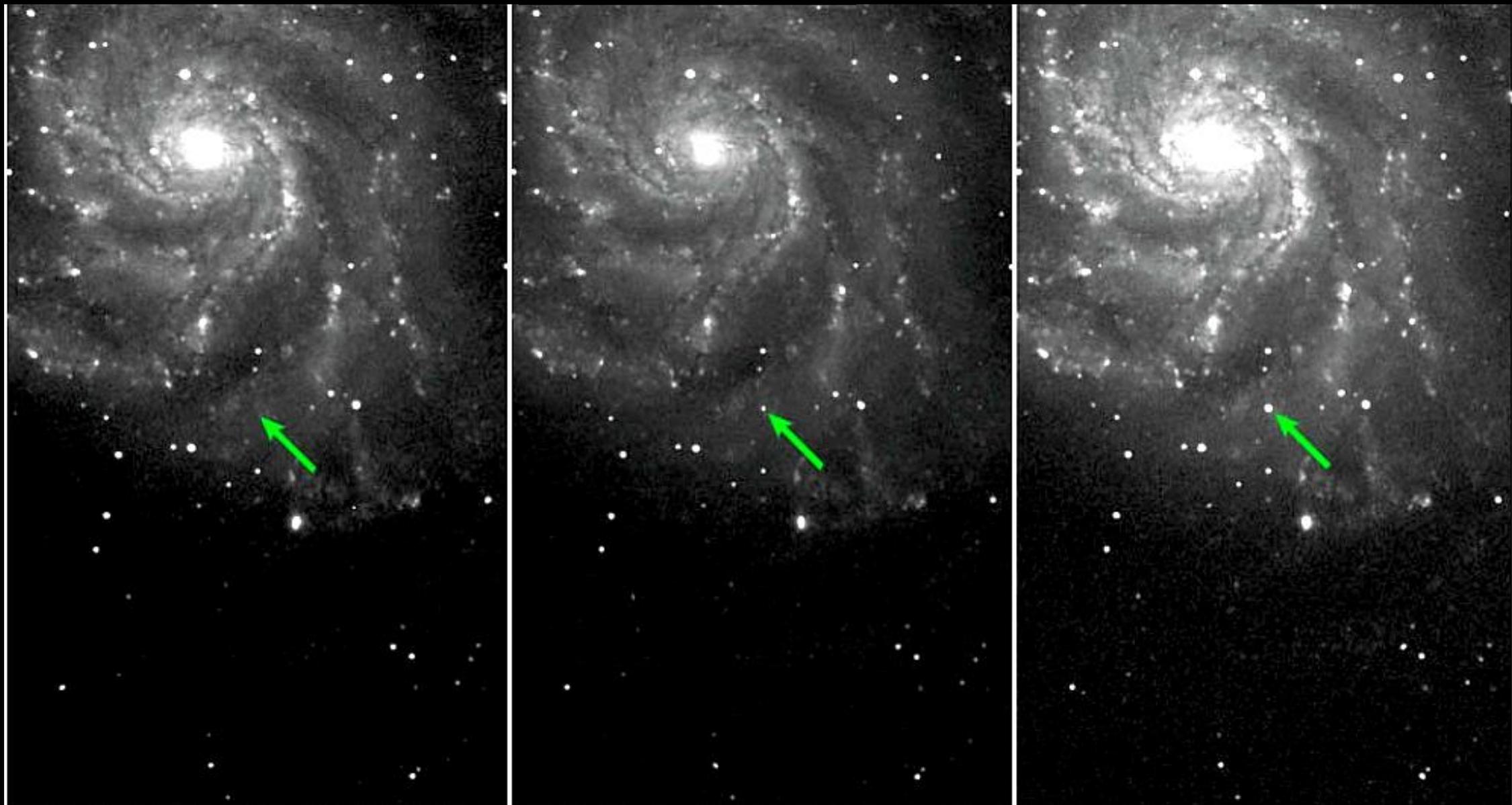


La massa della nana bianca aumenta sino a raggiungere il valore critico, ed esplose...

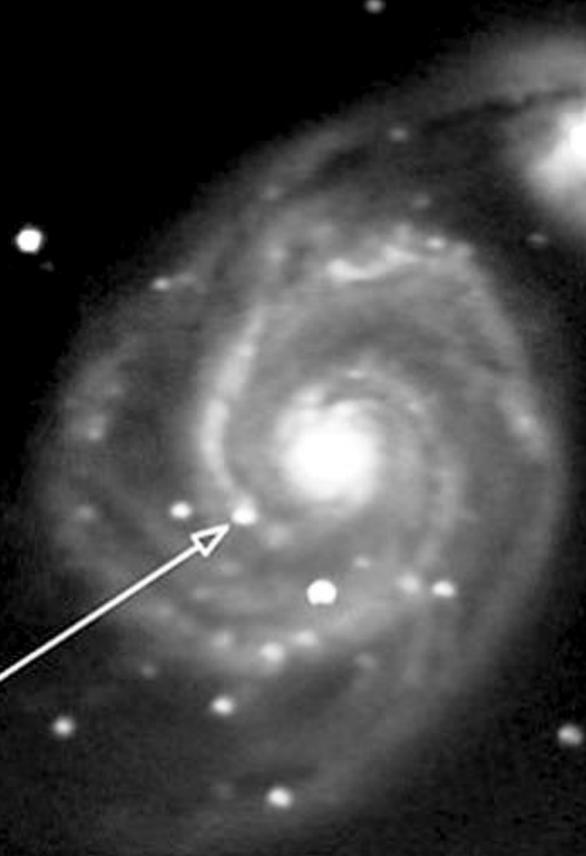


...causando l'espulsione dal sistema della compagna.

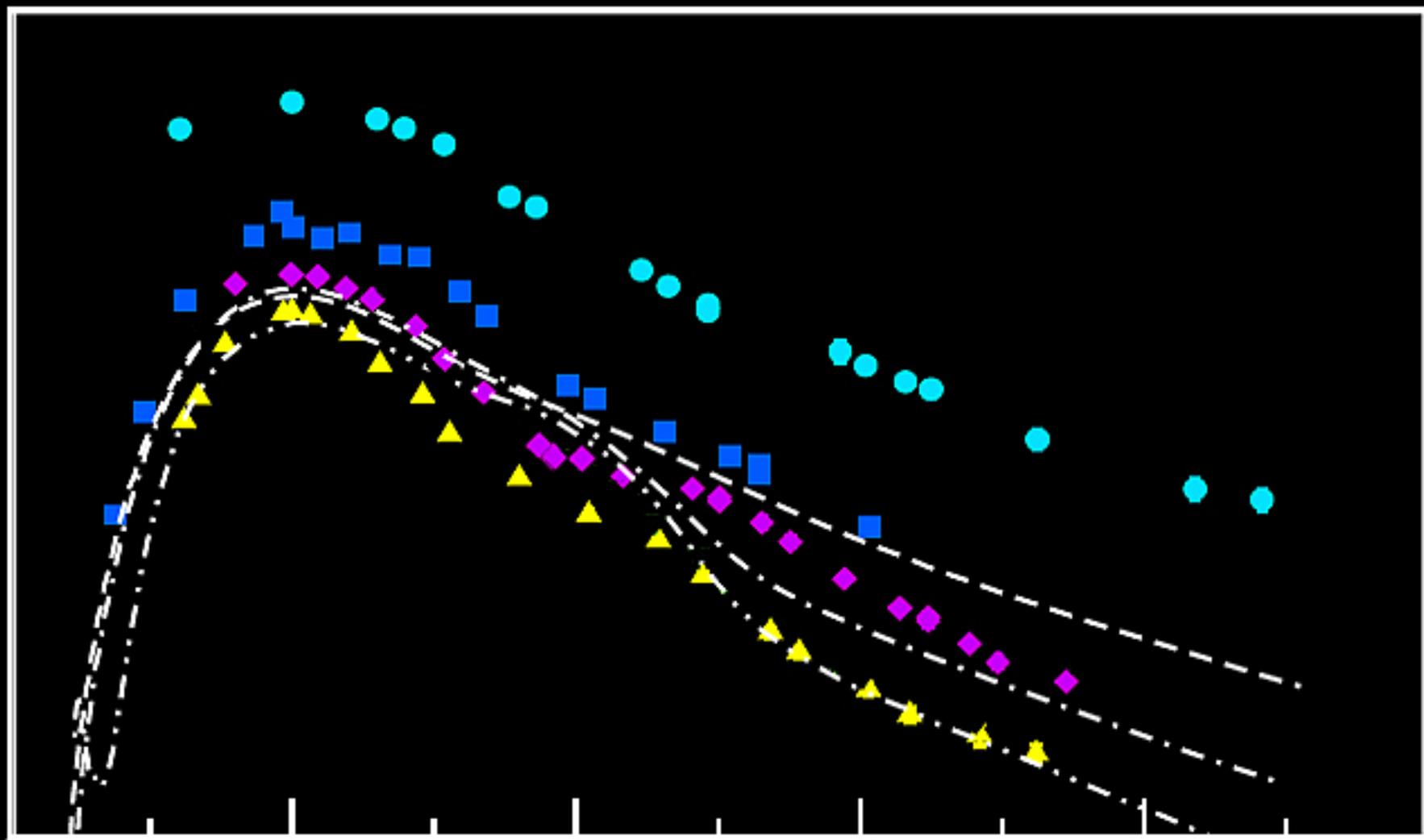
SN2011e



SN2005cs



Brightness



Time

Siccome l'esplosione avviene in condizioni molto simili per tutte le SN Ia, l'energia radiante emessa è dell'ordine di 10^{44} joules per tutte. Quindi presenteranno la medesima magnitudine assoluta M , ma verranno osservate con una magnitudine apparente m che dipende dalla distanza d . La distanza d quindi sarà quella della galassia che le contiene.

Modulo di distanza

$$m - M = 5 \log_{10}(d) - 5 = 5 \log_{10} \left(\frac{d}{10 \text{ pc}} \right).$$

m = *magnitudine apparente*

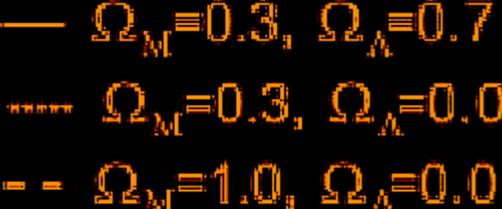
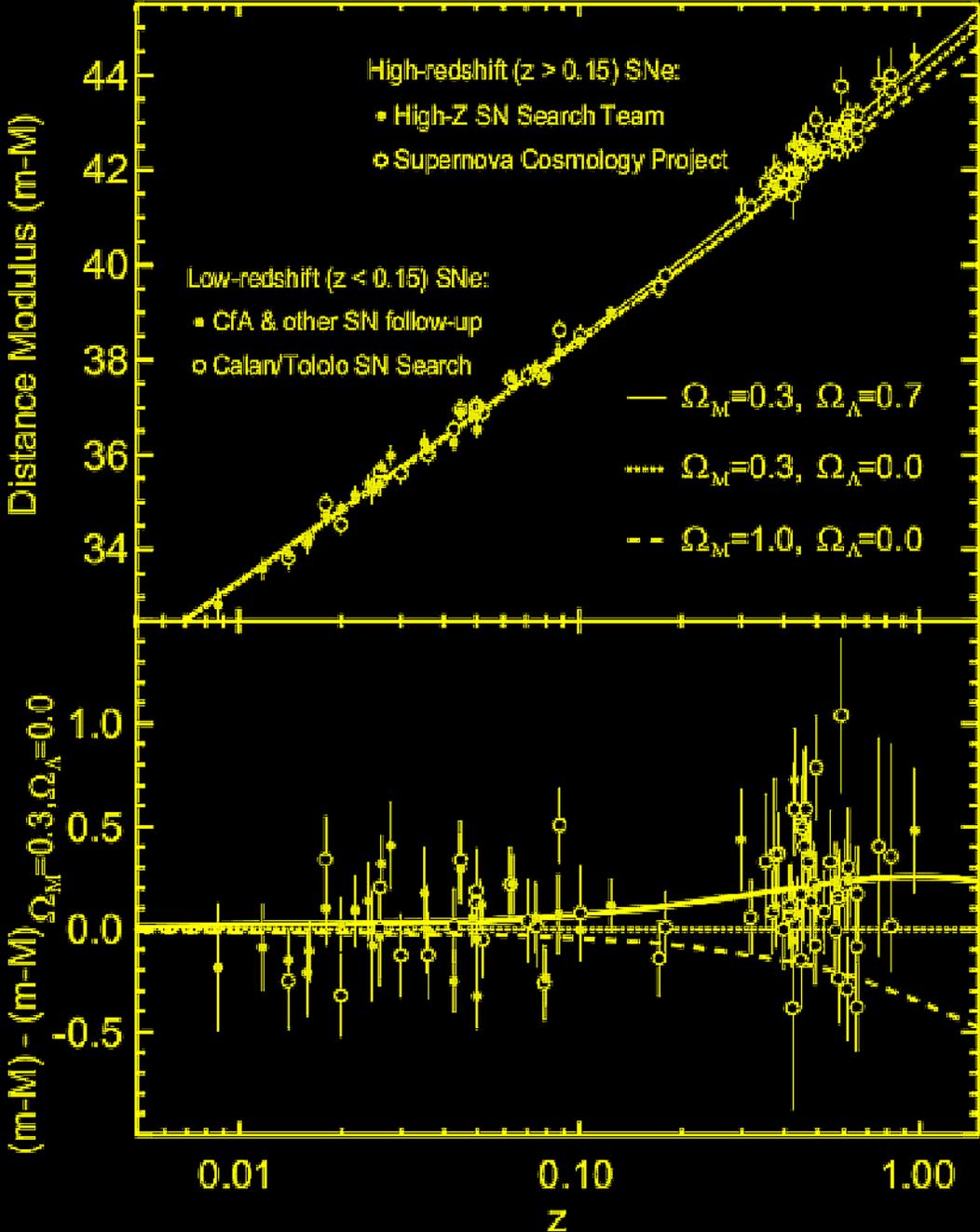
M = *magnitudine assoluta*

In più la luce emessa sarà spostata verso il rosso (Redshift) a seconda della velocità radiale di allontanamento. A questo punto abbiamo la velocità v e la distanza d e quindi sarà possibile calcolare la costante di Hubble per ciascuna supernova:

$$H = v / d$$

E inserire ciascuna supernova nel diagramma di Hubble

diagramma di Hubble



Le SN Ia si dispongono più in alto rispetto alla legge di Hubble accettata dal modello cosmologico con espansione lineare uniforme:

$$v = H_0 \cdot d \quad \text{---} \quad \Omega_M = 0.3, \Omega_\Lambda = 0.0$$

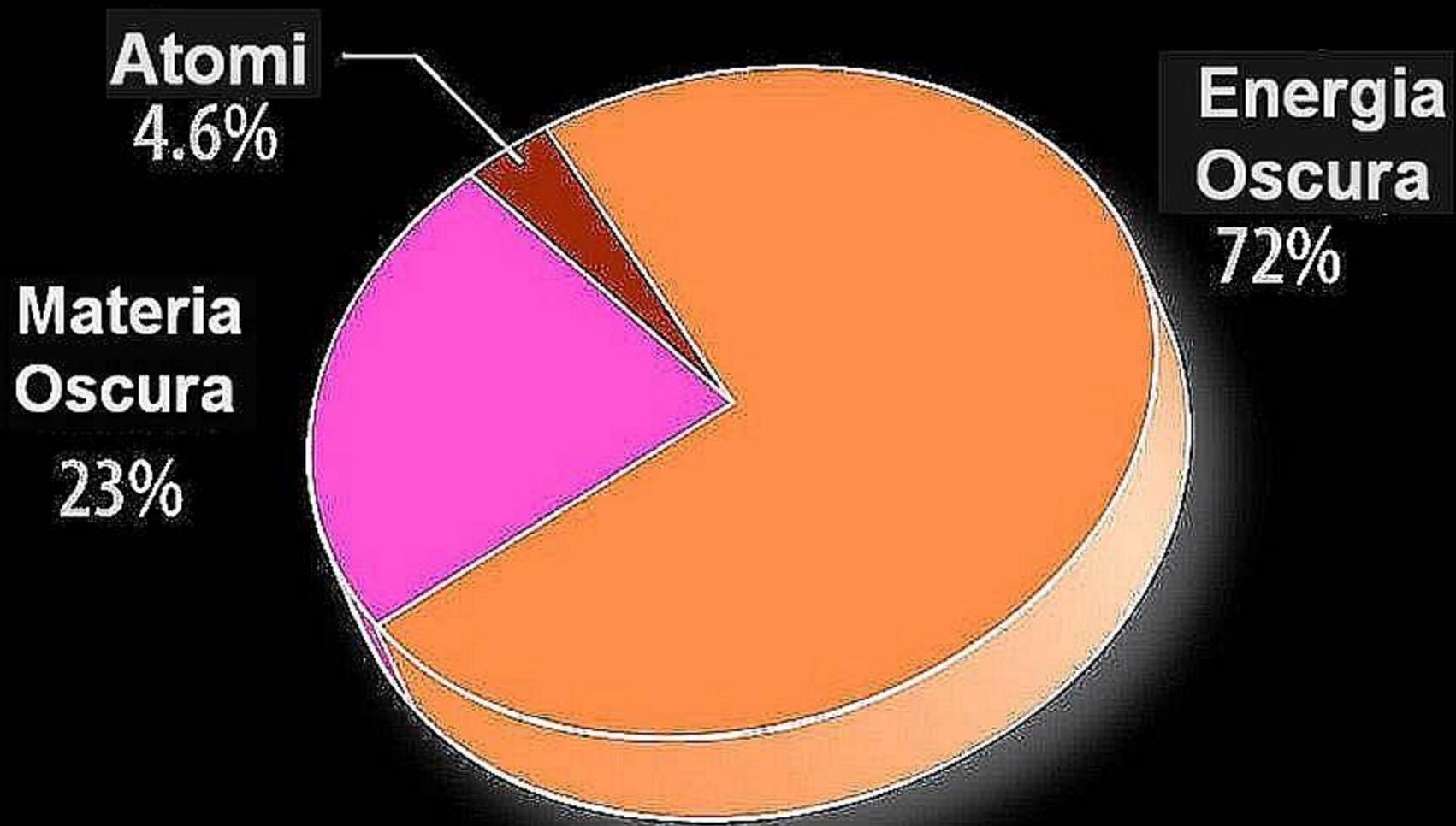
ma indicano che a grande distanza da noi si ha:

$$v = H_0 \cdot d + H_1 \cdot d^2 + \dots \quad \text{---} \quad \Omega_M = 0.3, \Omega_\Lambda = 0.7$$

L'Universo sta accelerando la sua espansione...

Questi esperimenti **misurano** Λ , ci dicono quanto vale ! ...
Ora la misura ci dice che Λ è piccolissima se confrontata
col **valore pazzesco dell'energia del vuoto** che, secondo
Zeldovich e non solo, dovrebbe appunto dare contributo a Λ .

Se invece confrontiamo il **valore misurato di Energia Oscura**
col budget di Materia ed Energia dell'Universo, scopriamo che
L'Energia Oscura costituisce una frazione molto grande
dell'intero budget energetico dell'Universo :



Oggi

L'Energia Oscura

(ovvero il **Termine Cosmologico** Λ)

torna a **pieno titolo** nella nostra descrizione dell'Universo e **la fa da padrona !**

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} \cdot T_{\mu\nu}$$

Questo è il termine dominante !

Il Ritorno dell'Energia Oscura

- Ma che cosa è questa **Energia Oscura** ?
- Di che cosa è fatta ?
- Risposta : **non lo sa nessuno...**

Il Mistero dell'Energia Oscura

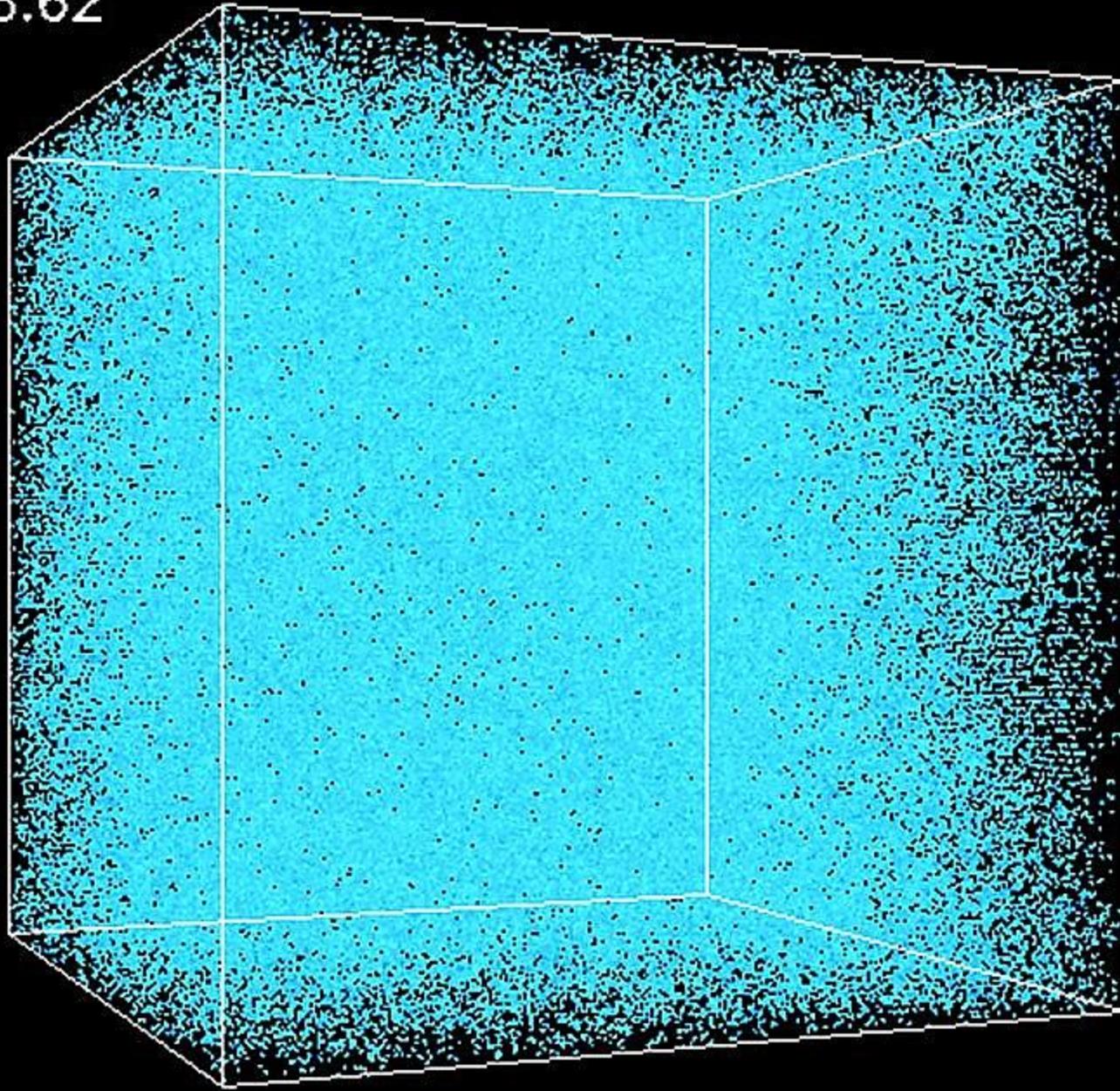


Energia Oscura

- > E' diffusa in tutto l'Universo
- > Ha bassissima densità: 10^{-29} g/cm³
- > Tende a crescere con il tempo
- > Si oppone alla gravità
- > Destruce l'Universo
- > Conduce alla morte l'Universo

Ecco i suoi effetti...

$Z=28.62$

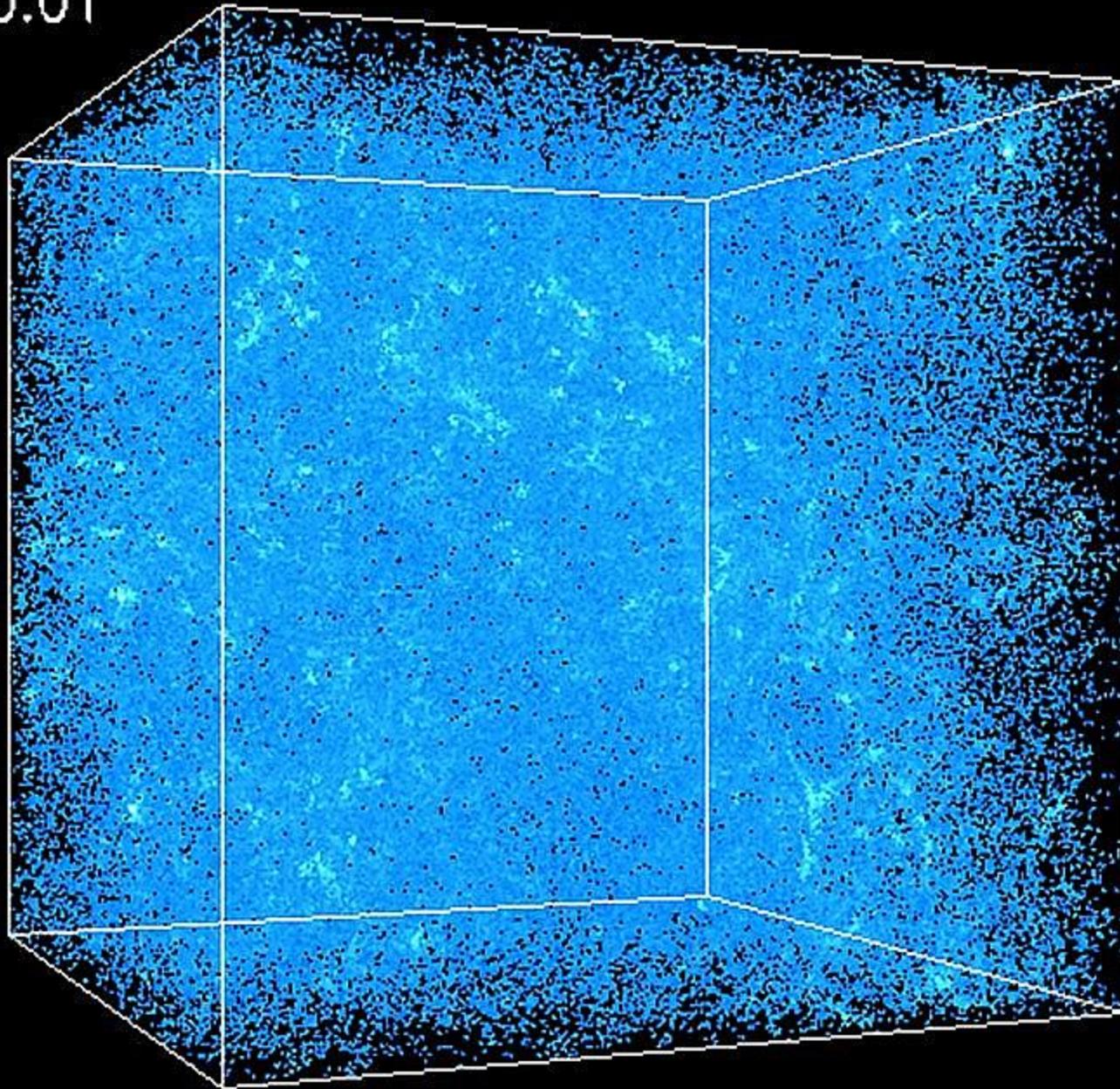


$t = 13.7 / (1+z)^2$ Gy
dopo il Big Bang

$t = 0.0156$ Gy

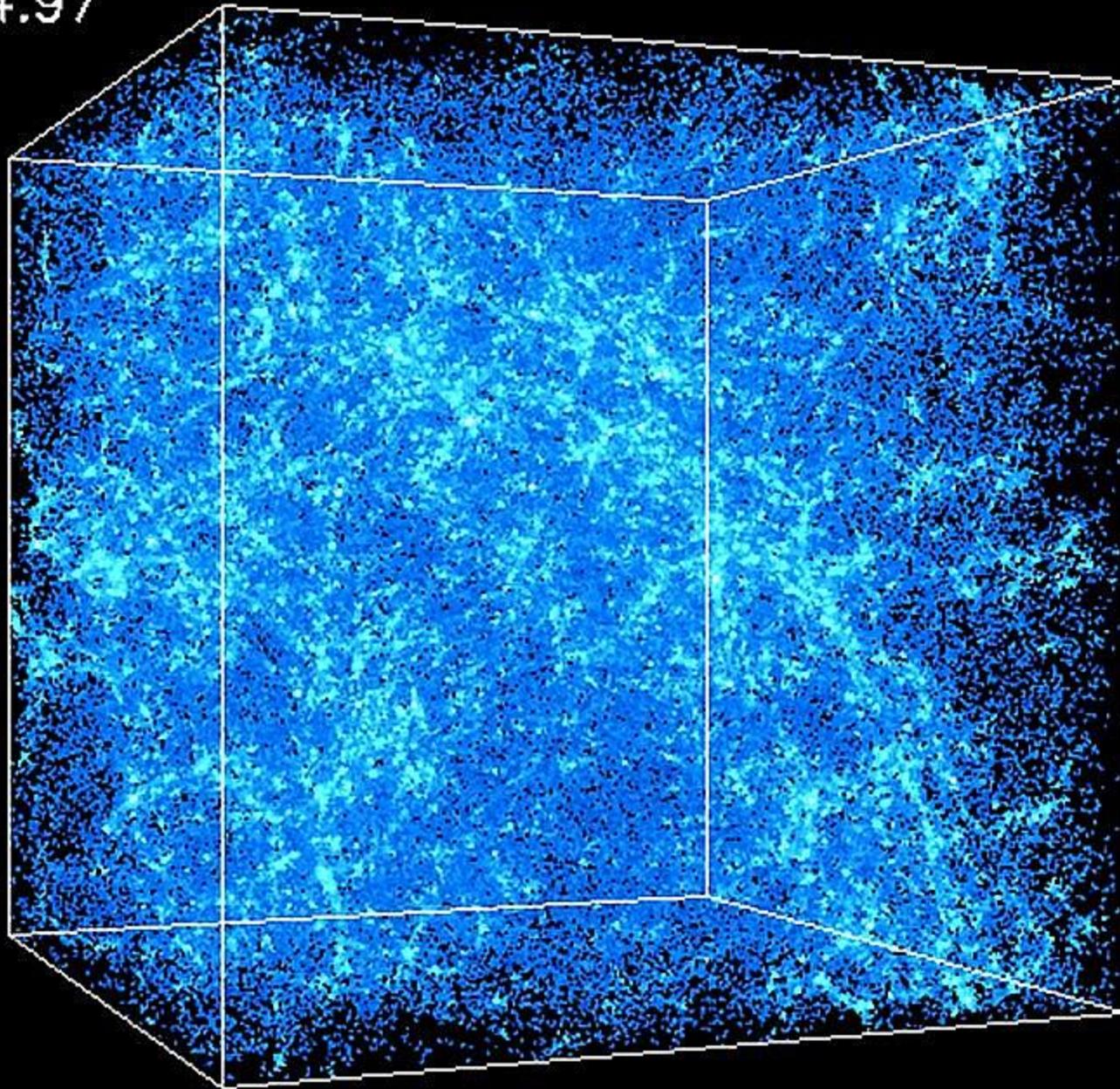
$Z=10.01$

$t = 13.7 / (1+z)^2$ Gy
dopo il Big Bang



$t = 0.113$ Gy

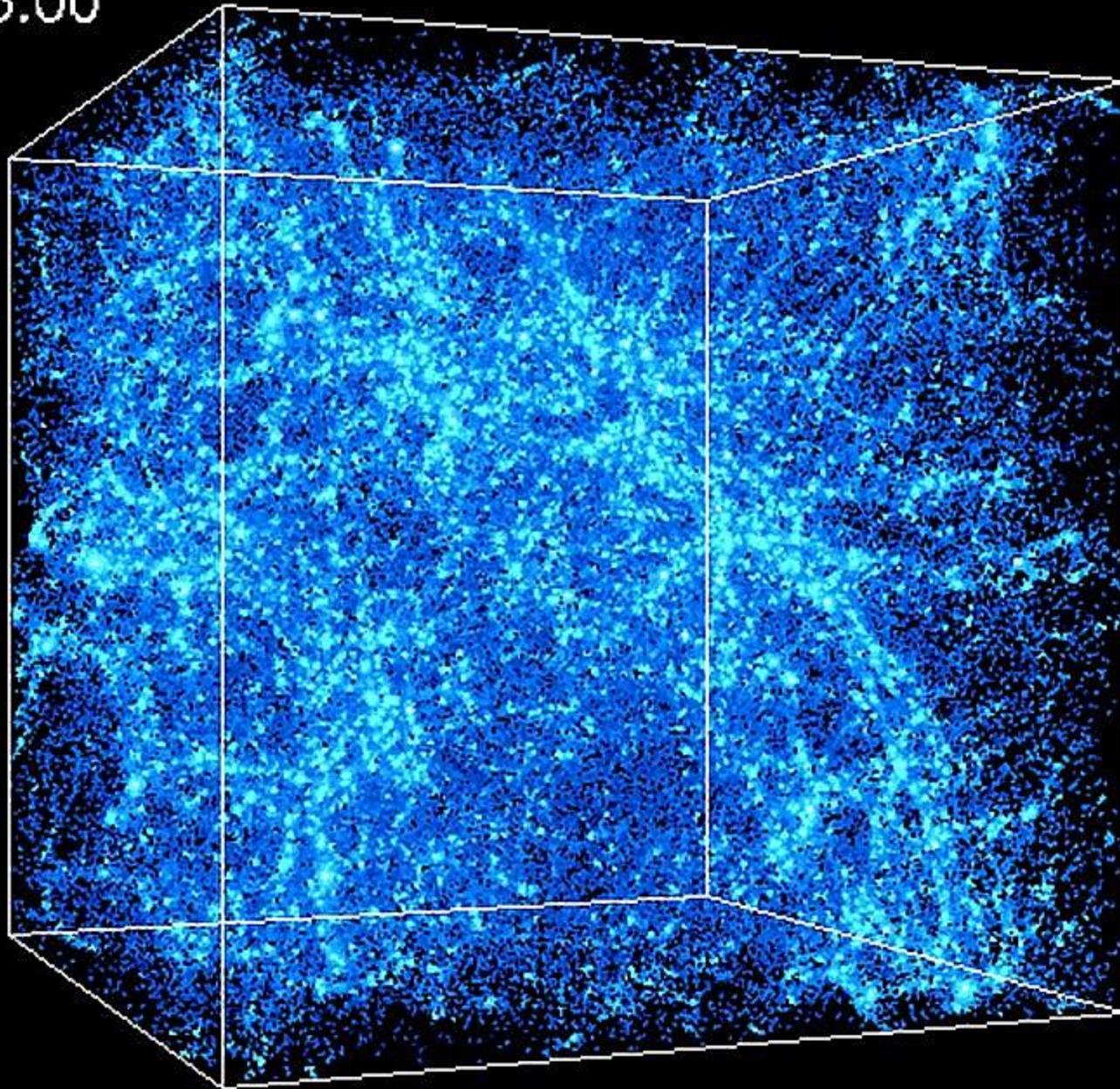
$z = 4.97$



$t = 13.7 / (1+z)^2$ Gy
dopo il Big Bang

$t = 0.384$ Gy

$z = 3.00$

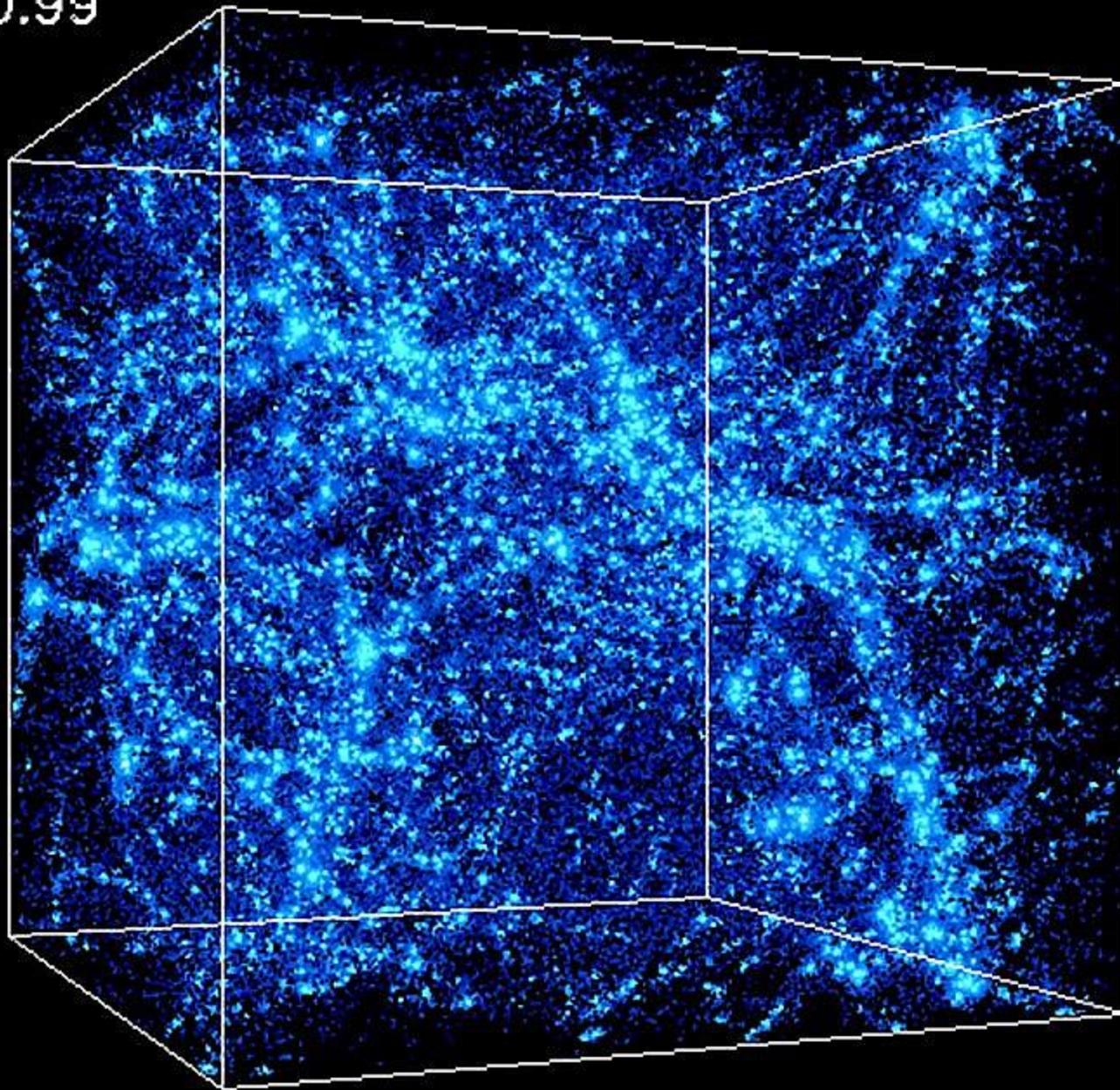


$t = 13.7 / (1+z)^2$ Gy
dopo il Big Bang

$t = 0.856$ Gy

$z = 0.99$

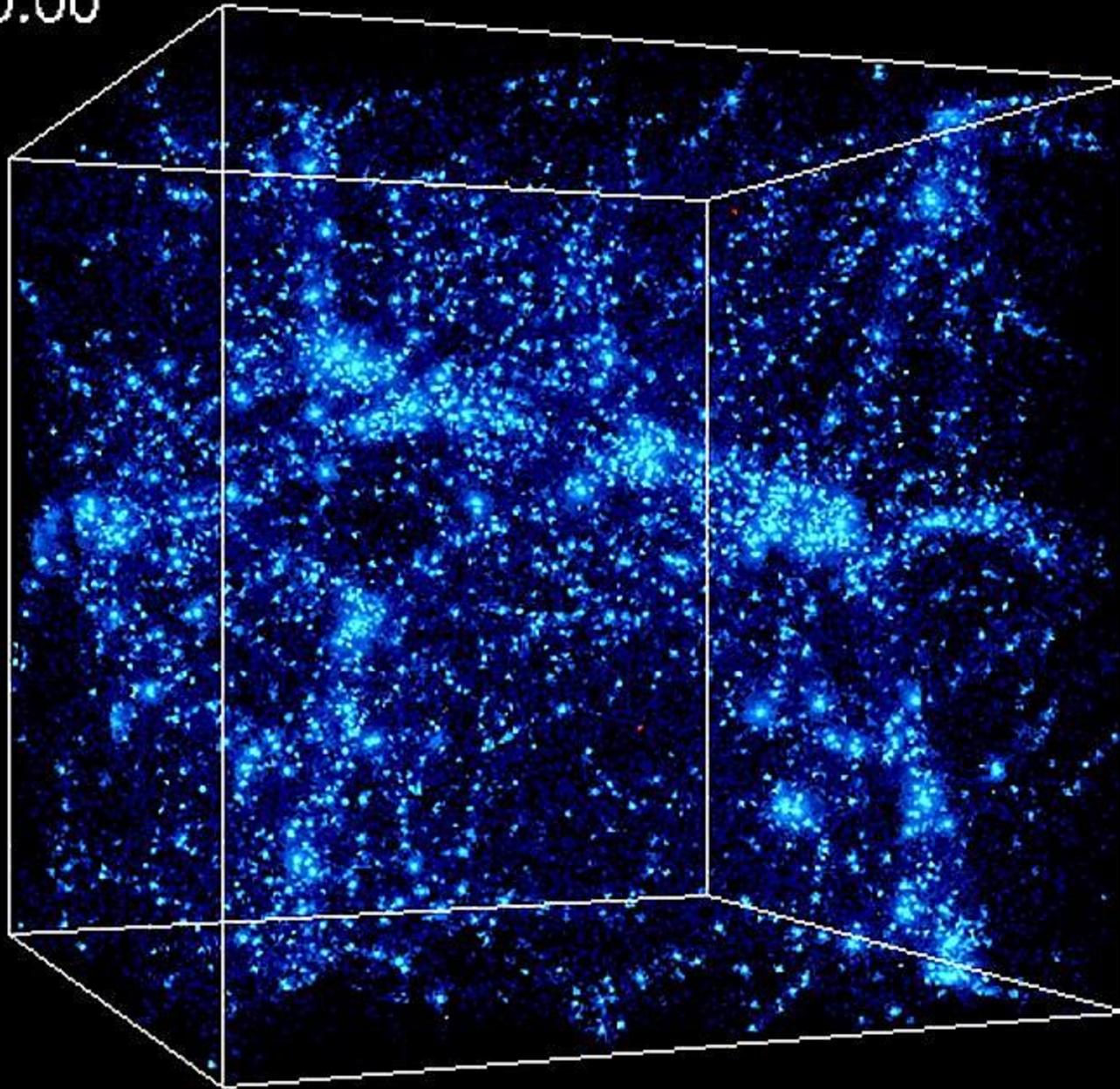
$t = 13.7 / (1+z)^2$ Gy
dopo il Big Bang



$t = 3.460$ Gy

$z = 0.00$

$t = 13.7 / (1+z)^2$ Gy
dopo il Big Bang



$t = 13.7$ Gy
oggi...

Forza Cosmologica (Rovelli)

Una soluzione esatta dell'equazione di
Einstein:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

è la seguente:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{\lambda}{3}r^2\right)dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{2M}{r} - \frac{\lambda}{3}r^2}dr^2 + r^2d\Omega^2.$$

La differenza, rispetto al caso di Schwarzschild, è che il potenziale newtoniano $-M/r$ viene modificato dall'aggiunta del termine $-(\lambda/6)r^2$. Questo determina una forza *repulsiva* per unità di massa di prova

$$F_\lambda = \frac{\lambda}{3}r.$$

Questa forza è debole perché la costante cosmologica λ è molto piccola, ma aumenta con la distanza. Diventa importante a distanze grandi – cosmologiche –, da cui il nome della costante.

Quindi la gravità è attrattiva a piccole distanze, ma a grandi distanze diventa repulsiva. Il punto di equilibrio (instabile) da un corpo di massa M è a

$$\frac{GM}{r^2} = \frac{\lambda}{3} r$$

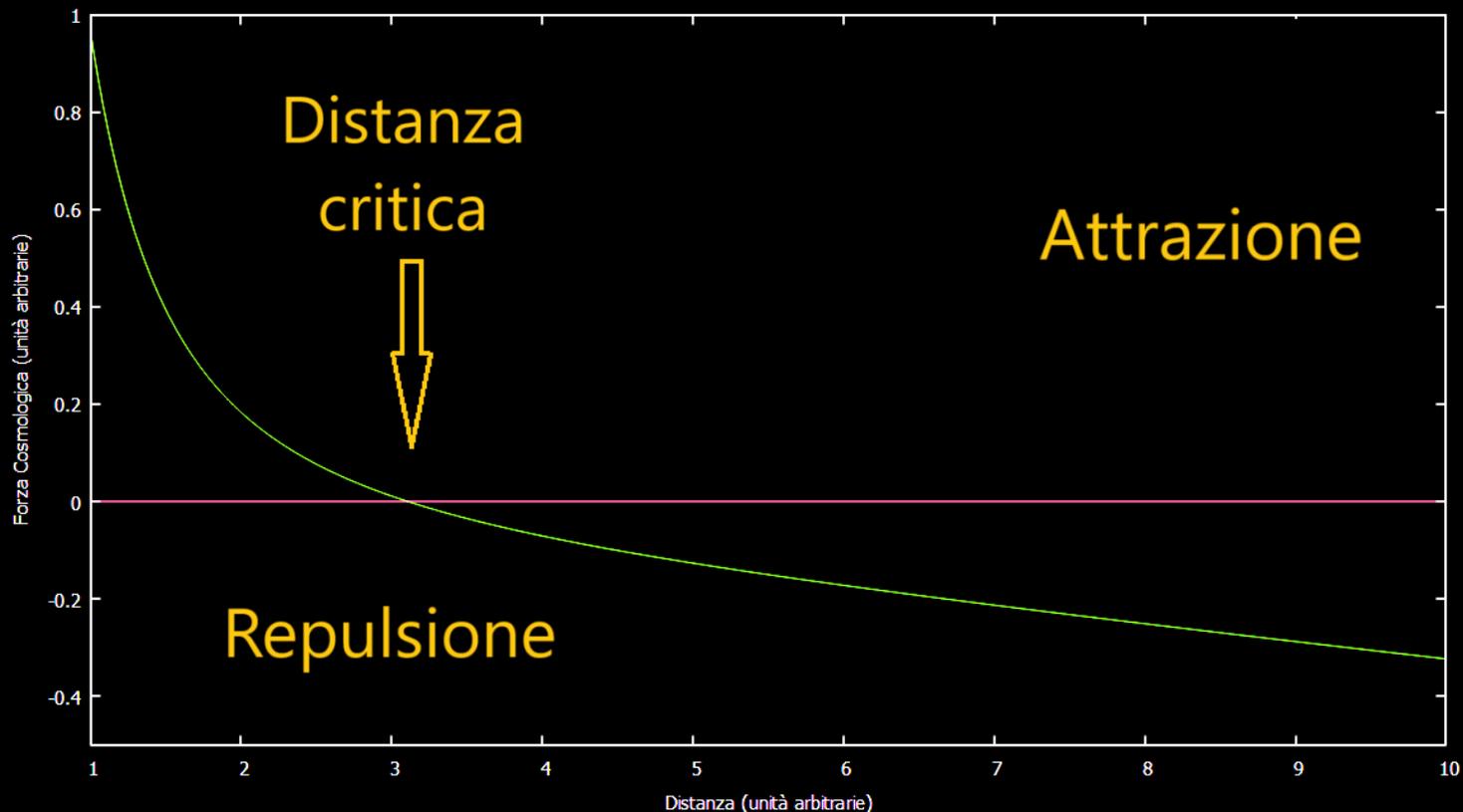
ovvero

$$r = \sqrt[3]{\frac{3GM}{\lambda}}$$

Questa forza (non una misteriosa « energia del vuoto quantistica » o « energia oscura ») è la ragione per cui l'espansione dell'universo sta attualmente accelerando

Forza Cosmologica

$$F = \left[\frac{GM}{r^2} - \frac{\lambda}{3} r \right] m$$





Grazie per l'attenzione!!