



Università "Cardinale Giovanni Colombo" - Milano

A.A. 2024 - 2025

Corso di Astrofisica

Docente: **Adriano Gaspani**

Lezione 11

Il collasso gravitazionale:  
i Buchi Neri

# Stelle oscure newtoniane

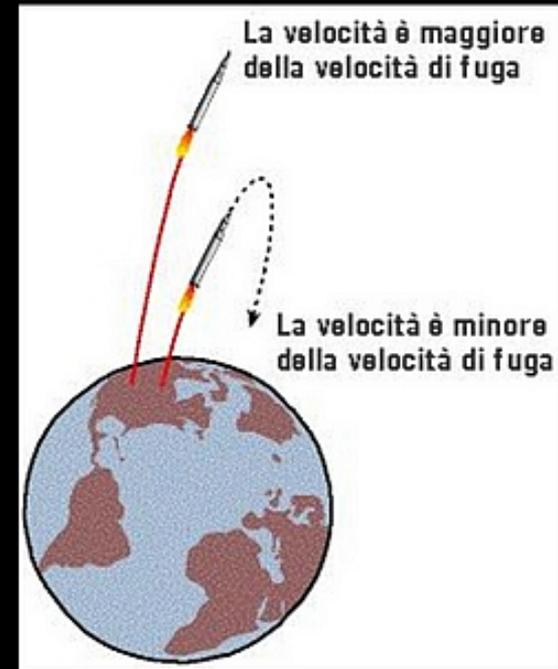
Velocità di fuga dalla superficie terrestre:  
11 km/s

A parità di massa, minore è il raggio e  
maggiore è la velocità di fuga

Se concentriamo la massa entro un raggio critico,  
la velocità di fuga diventa superiore a quella della luce.  
Abbiamo una "dark star".

*...supposing a light to be attracted by the same force in proportion to its inertial mass,  
with other bodies, all light emitted from such a body would be made to return towards it  
by its own proper gravity (John Mitchell, 1784)*

Nel 1796 anche Laplace menziona questa possibilità.



# I BUCHI NERI e P.S. de Laplace



- Già il matematico Laplace (Exposition du Systeme du Monde -1793) aveva intuito l' esistenza di oggetti, *les astres occlus*, da cui la luce non potesse fuggire (problema di velocità di fuga , visione particellare della luce, spazio euclideo piatto, **vecchio paradigma**)
- Il buco nero relativistico invece e' un estremo prodotto della curvatura gravitazionale (**nuovo paradigma**)

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

$v_e$  = velocità di fuga

$G$  = costante di gravitazione universale

$M$  = massa del corpo da cui fuggire

$r$  = distanza dal centro della massa

Sostituiamo la velocità della luce  $c$  alla velocità di fuga.

$$c = \sqrt{\frac{2GM}{r_0}}$$

$v_e$  = velocità della luce nel vuoto

$G$  = costante di gravitazione universale

$M$  = massa del corpo da cui fuggire

$r_0$  = distanza dal centro della massa

$$r_o = \frac{2GM}{c^2}$$

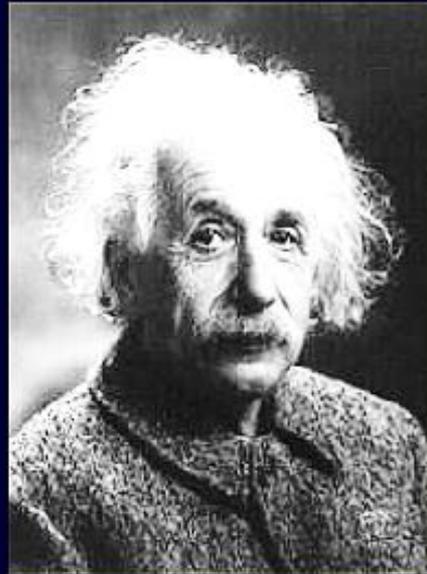
$v_e$  = velocità della luce nel vuoto

$G$  = costante di gravitazione universale

$M$  = massa del corpo da cui fuggire

$r_o$  = distanza dal centro della massa  
Raggio gravitazionale

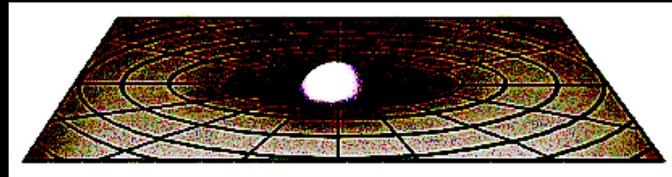
# Le due rivoluzioni scientifiche dovute ad Albert Einstein



- 1905: Relatività ristretta. Equivalenza tra massa ed energia.
- 1915: Relatività generale. La massa curva lo spazio-tempo

# La Massa e lo Spazio: la nuova visione di Einstein

- Relatività Generale: la massa “curva” lo spazio, determinandone la geometria .
- La gravità è espressa dalla geometria dello spazio (i corpi si muovono lungo le ‘geodetiche’ della metrica)
- LO SPAZIO NON E' PIU' QUELLO DI EUCLIDE E DI PITAGORA....



# Equazione del campo gravitazionale

Tensore  
di Einstein

Costante

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = kT_{\mu\nu}$$

Tensore di Curvatura  
(di Ricci Curvastro)

Tensore Metrico

Scalare di Curvatura

Tensore  
Energia-Impulso

# Curvatura e gravitazione

Maggiore è il campo gravitazionale e maggiore è la curvatura.

Sì, ma c'è un limite...

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{tensore} \\ \text{metrico} \end{array}$$

Raggio di  
Schwarzschild

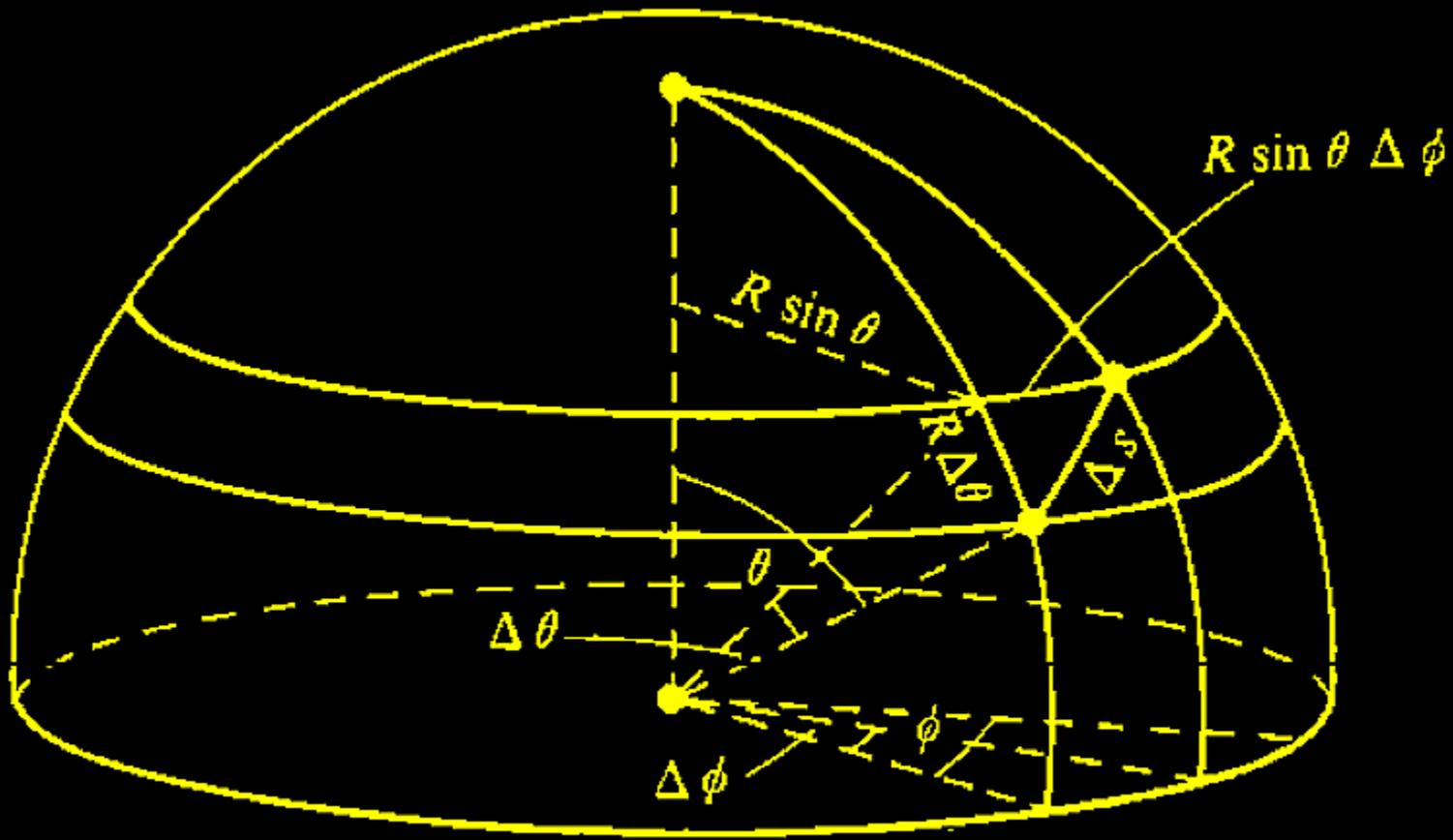
$$r_s = \frac{2GM}{c^2}$$

$r_s$  = raggio

$G$  = costante di gravitazione universale

$M$  = massa

$c$  = velocità della luce



Elemento di linea  $\Delta s$  su una sfera in coordinate sferiche

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

Curvatura locale di una superficie  
bidimensionale nel punto di  
coordinate  $x^1$  e  $x^2$

$$K = \frac{1}{2g_{11}g_{22}} \left\{ -\frac{\partial^2 g_{11}}{\partial (x^2)^2} - \frac{\partial^2 g_{22}}{\partial (x^1)^2} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2g_{11}} \left[ \frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} + \left( \frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} \right)^2 \right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{2g_{22}} \left[ \frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} \frac{\partial g_{22}}{\partial x^2} + \left( \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} \right)^2 \right] \right\}.$$

È possibile scrivere la metrica in forma matriciale:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \left(\frac{2GM}{c^2 r}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

Essa è singolare nei punti ove è singolare la matrice  $g_{\mu\nu}$ .

Per la metrica di Schwarzschild ciò avviene quando

- $1 - \frac{2GM}{c^2 r} = 0 \iff r = \frac{2GM}{c^2};$
- $r = 0.$

# La metrica di Schwarzschild

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2,$$

ove con  $M$  si indica la massa della sorgente, con  $G$  la costante di gravitazione universale e con  $c$  la velocità della luce. Si noti che per  $M \rightarrow 0$ , si ritrova lo spaziotempo di Minkowski; per  $M > 0$ , invece, la metrica di Minkowski si ottiene asintoticamente per  $r \rightarrow \infty$ .

La scelta delle coordinate sferiche appare la più naturale, viste le simmetrie del problema, ma le componenti della metrica risultano singolari per  $r = \frac{2GM}{c^2}$ . Nel corso degli anni sono stati introdotti differenti sistemi di coordinate locali, per mettere in mostra determinate caratteristiche della geometria dello spazio-tempo.

# La soluzione di Schwarzschild

Nel 1916 l'astrofisico Karl Schwarzschild trova per primo una soluzione alle equazioni della relatività di Einstein per un oggetto sferico, statico e immerso in uno spazio vuoto. Se l'oggetto è concentrato entro un raggio critico, allora nulla, neanche la luce, può più uscirne.

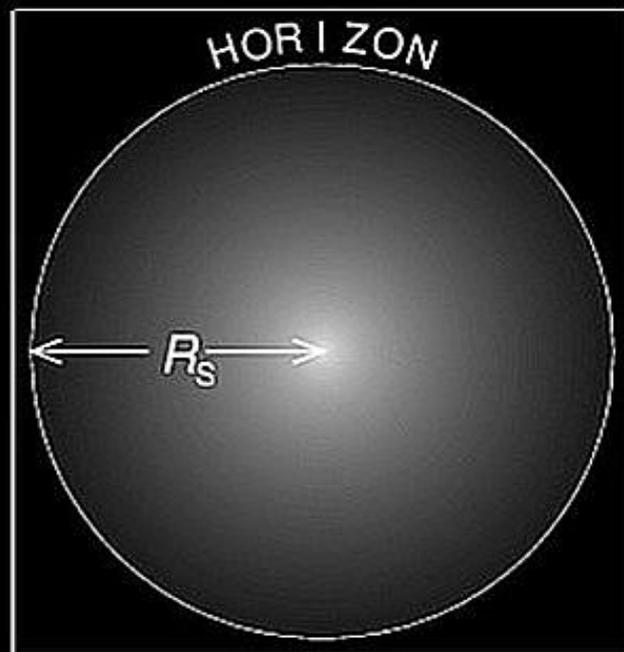


Karl Schwarzschild (1873-1916)

Raggio di Schwarzschild

$$R_s = \frac{2GM}{c^2}$$

$$R_s (km) \approx 3 \times \frac{M_{stella}}{M_{Sole}}$$



Nel 1967, Wheeler li battezza buchi neri

costante di gravitazione universale  $G = 6.67259 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}$

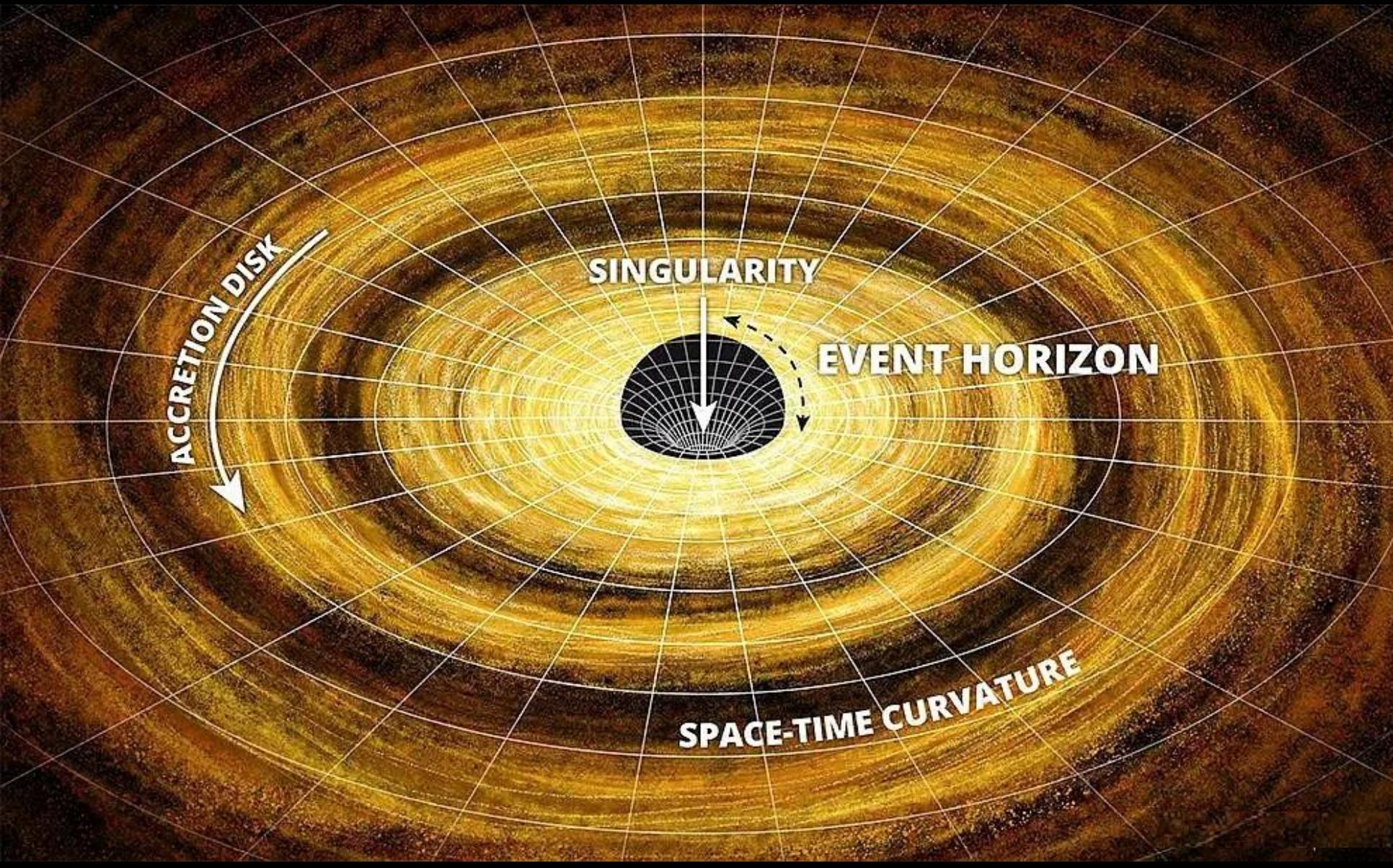
massa del Sole  $m_S = 1.989 \cdot 10^{30} \text{ kg}$

massa della Terra  $m_T = 5.9726 \cdot 10^{24} \text{ kg}$

$$\text{Raggio Schw. Terra} = \frac{2 \cdot G \cdot m_T}{c^2} = 8.868 \cdot \text{mm}$$

$$\text{Raggio Schw. Sole} = \frac{2 \cdot G \cdot m_S}{c^2} = 2.953 \cdot \text{km}$$

# Struttura di un Buco Nero



# Dal punto di vista della massa, esistono 3 tipi di Buchi Neri

a) Buchi Neri supermassicci (SMBH)

Masse dell'ordine di miliardi di masse solari

b) Buchi Neri stellari

Masse mediamente minori di 15 masse solari

c) Buchi Neri intermedi

Masse da 100 a 1000 masse solari

# Classificazione dei buchi neri

**Buchi neri aventi una massa decine o centinaia di volte la massa del Sole:** rappresentano la fase finale dell'evoluzione di stelle di grande massa.

**Buchi neri supermassicci, aventi una massa milioni o miliardi di volte quella del Sole:** al centro delle galassie, sono il motore dei Nuclei Galattici Attivi e dei Quasar.

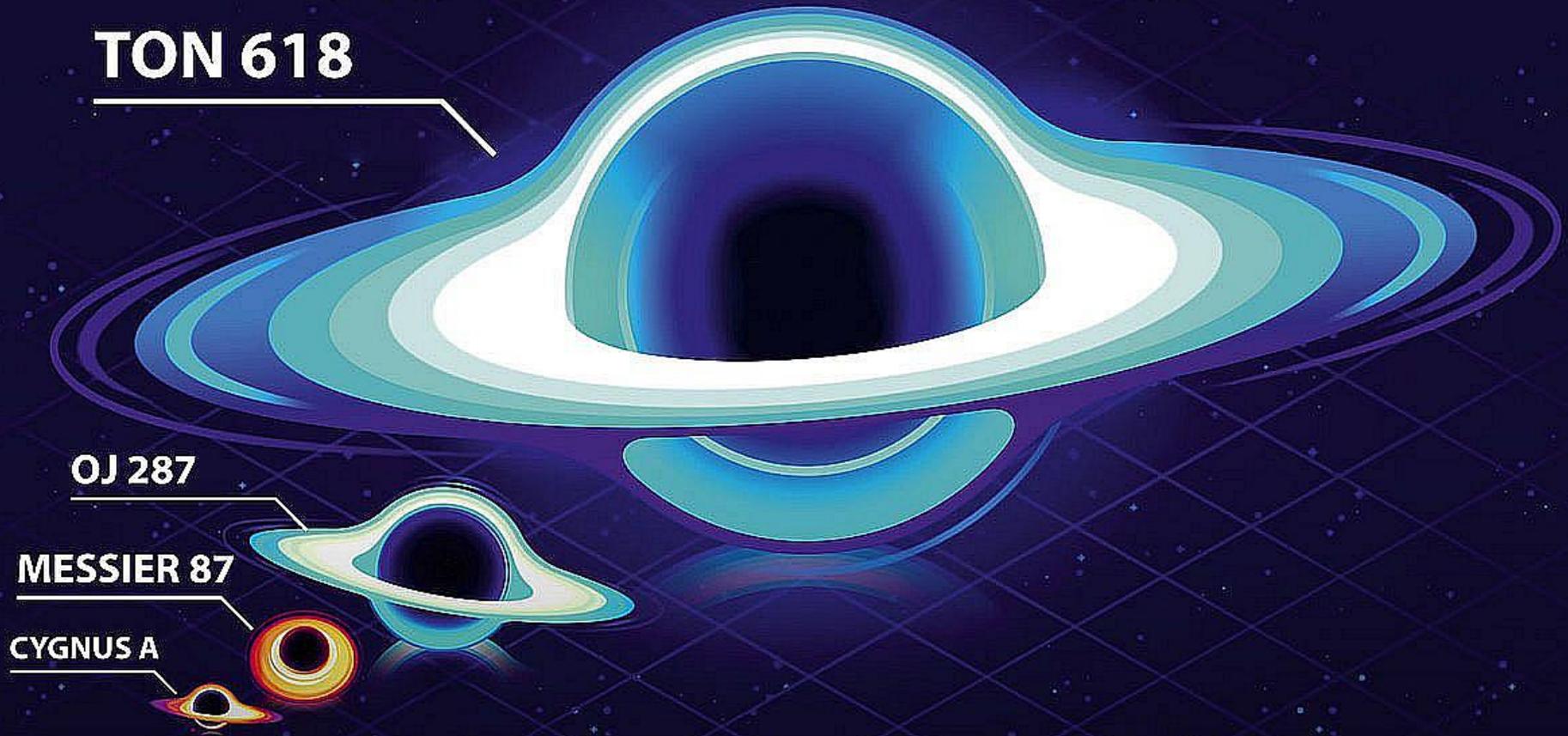
**TON 618**  
2606 AU Diameter.

**S5 0014+81**  
Supermassive black hole,  
approx 1582 AU diameter.

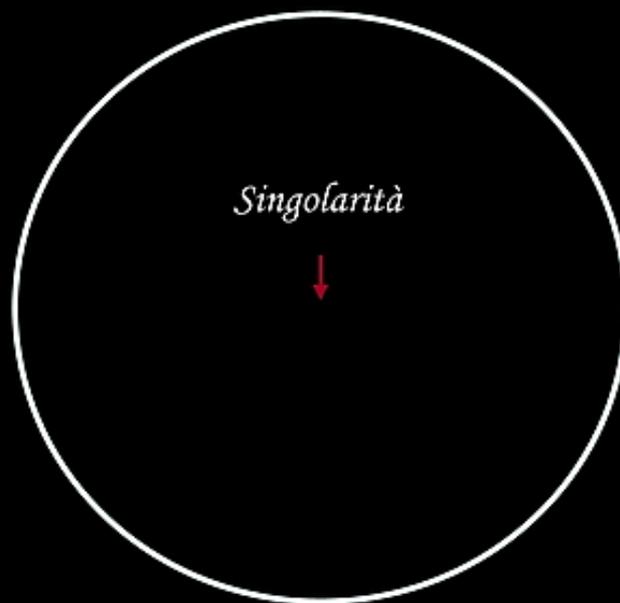
Solar system, approx. 80 AU diameter.

# Buchi Neri supermassicci (SMBH)

Masse dell'ordine di miliardi di masse solari



# L'orizzonte degli eventi

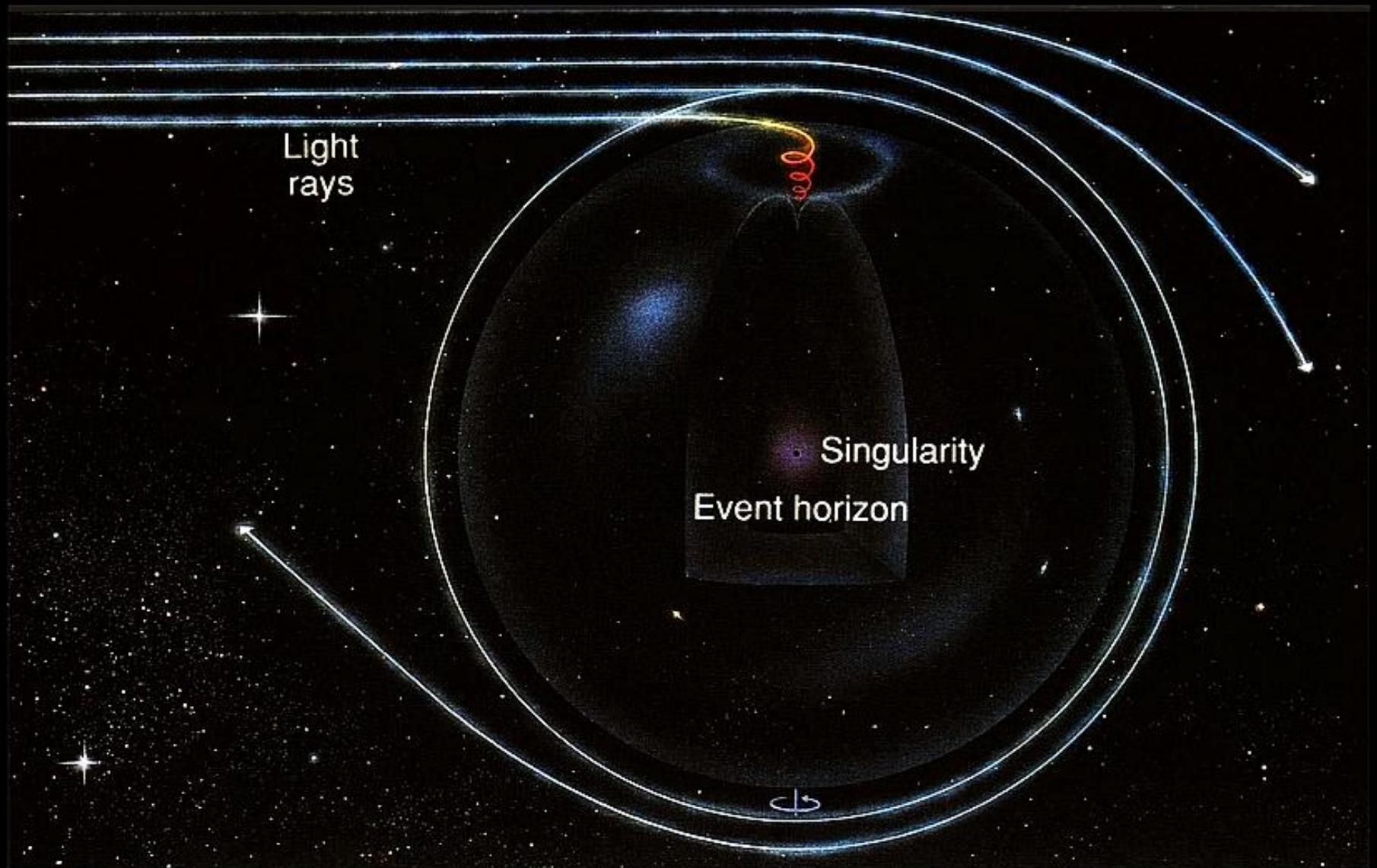


*Singolarità*



*Orizzonte degli eventi*

# Deviazione dei raggi di luce



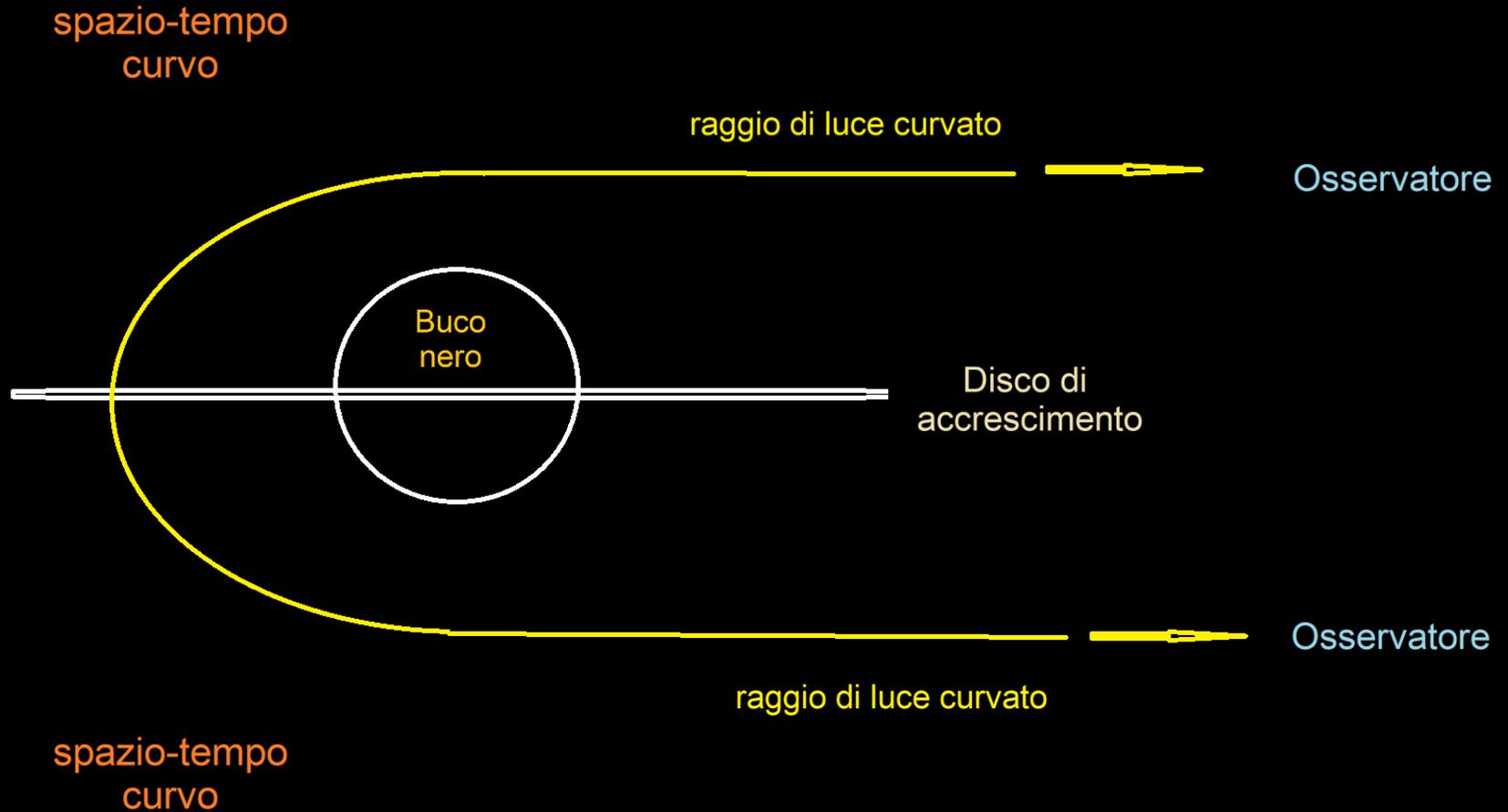
# Come apparirebbe un buco nero da «vicino»



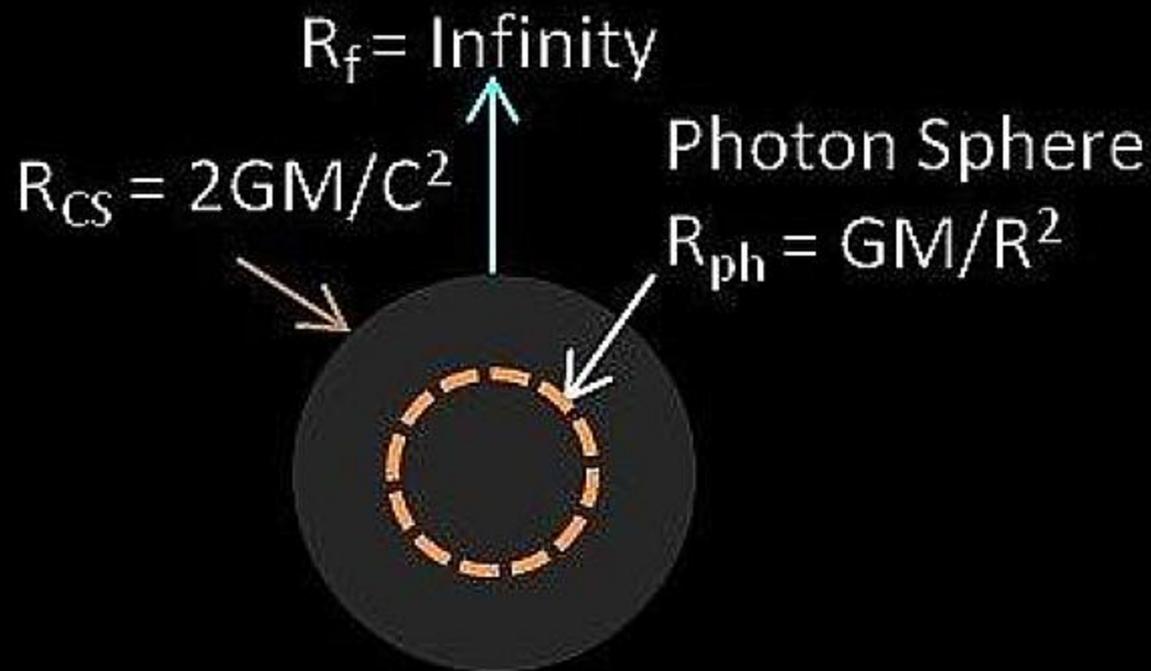
immagine rifratta del  
disco di accrescimento

immagine rifratta del  
disco di accrescimento

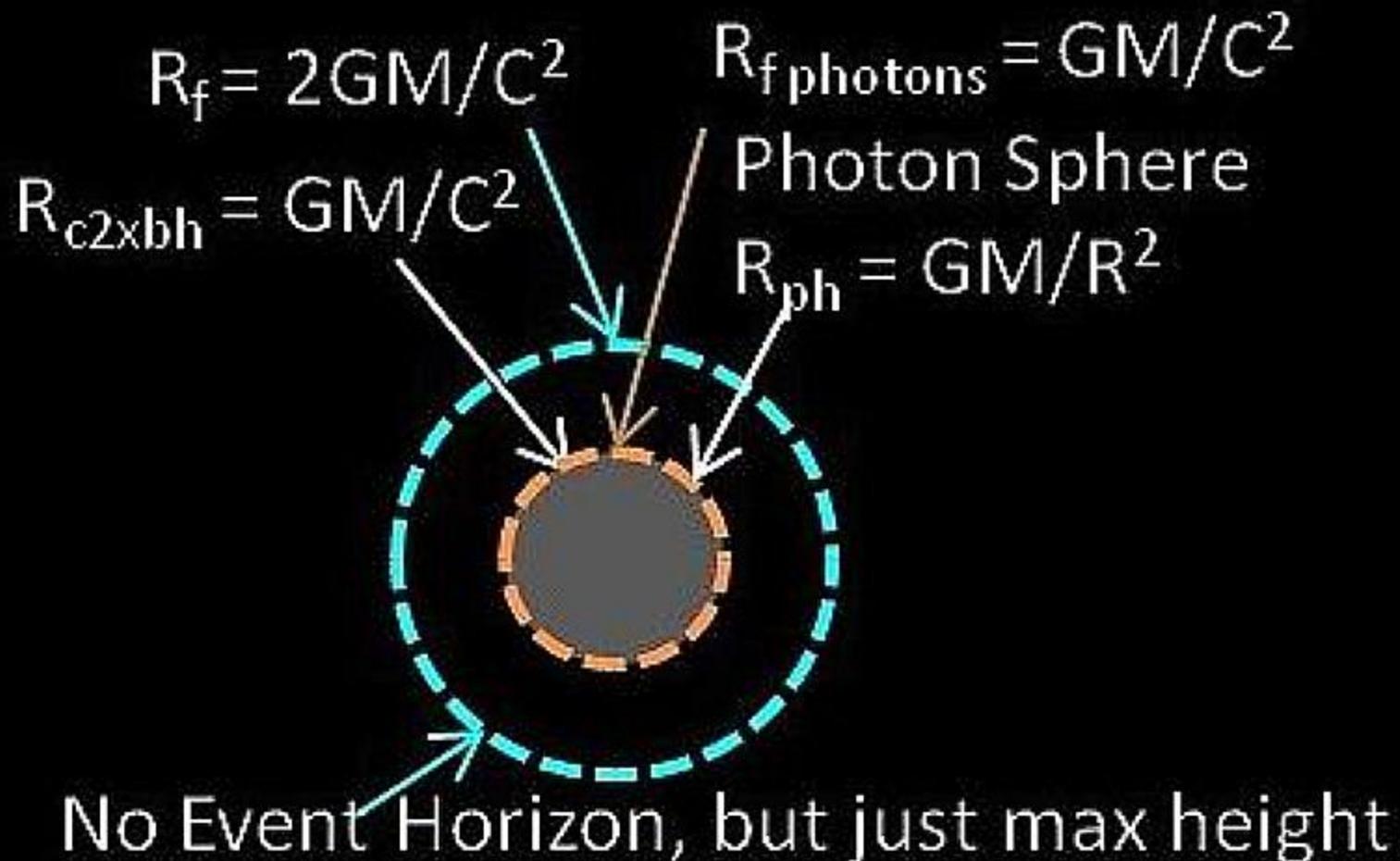
# Come apparirebbe un buco nero da «vicino»



# Classical Stationary Schwarzschild Dark Star



# Classical Stationary Finite Black Hole



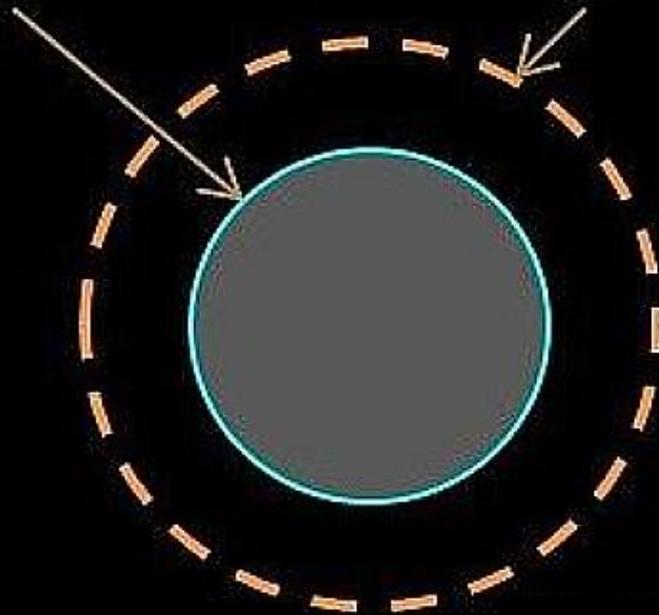
# Relativistic Schwarzschild Stationary Black Hole

Event Horizon

$$R_f = R_s = 2GM/c^2$$

Photon Sphere

$$R_{ph} = 3GM/c^2$$



# Reissner – Nordstrom Stationary Electrically Charged Black Hole

Two event horizons:

$$R_{\text{outer}} = GM/C^2 + \sqrt{(GM/C^2)^2 - q^2}$$

$$R_{\text{inner}} = GM/C^2 - \sqrt{(GM/C^2)^2 - q^2}$$

Zero charge

$$R_q = 2GM/C^2$$

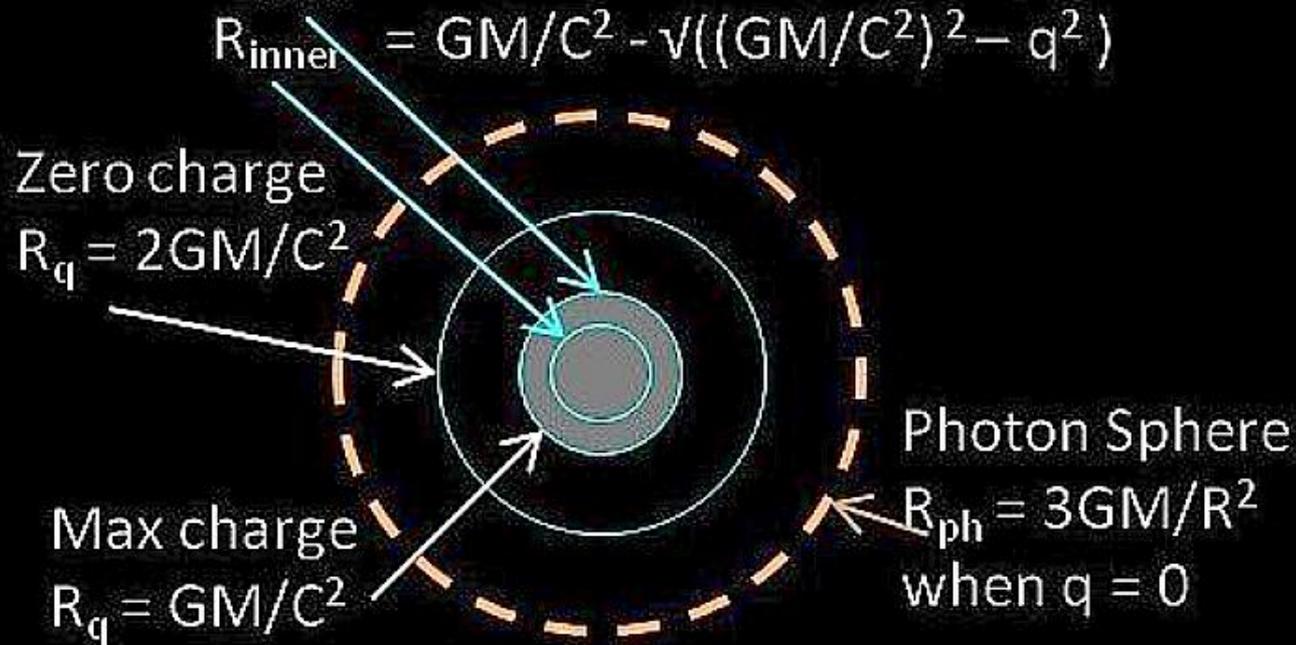
Max charge

$$R_q = GM/C^2$$

Photon Sphere

$$R_{\text{ph}} = 3GM/R^2$$

when  $q = 0$



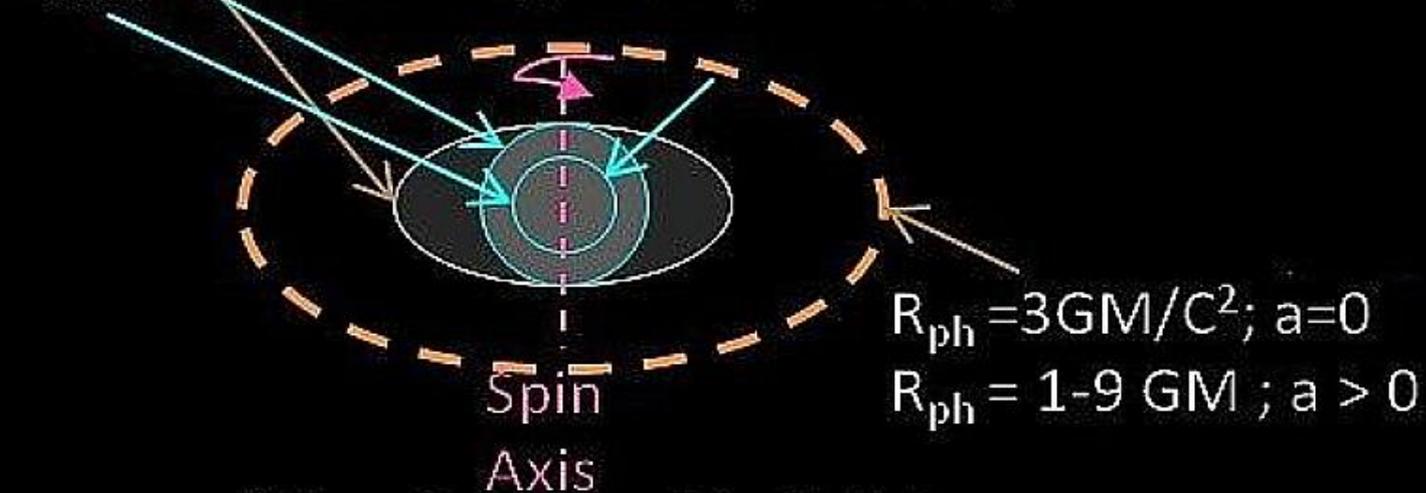
# Kerr Spinning Black Hole

Ergosphere Radius and two event horizons

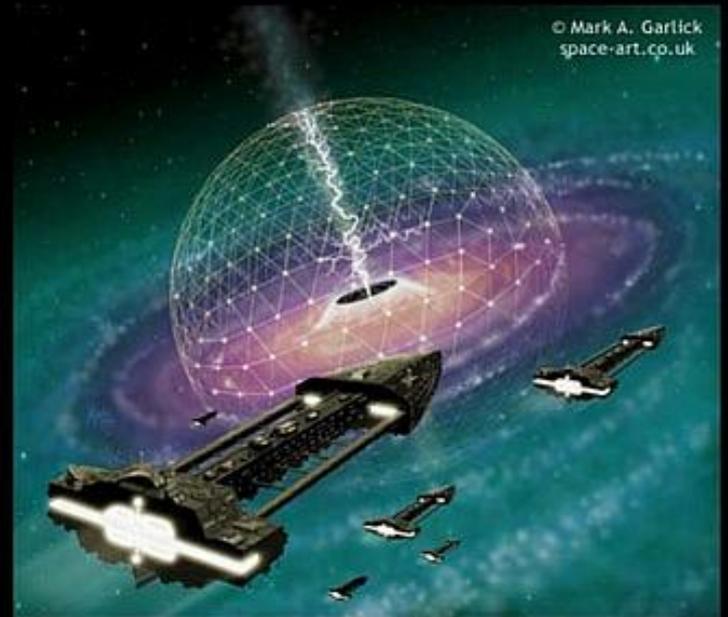
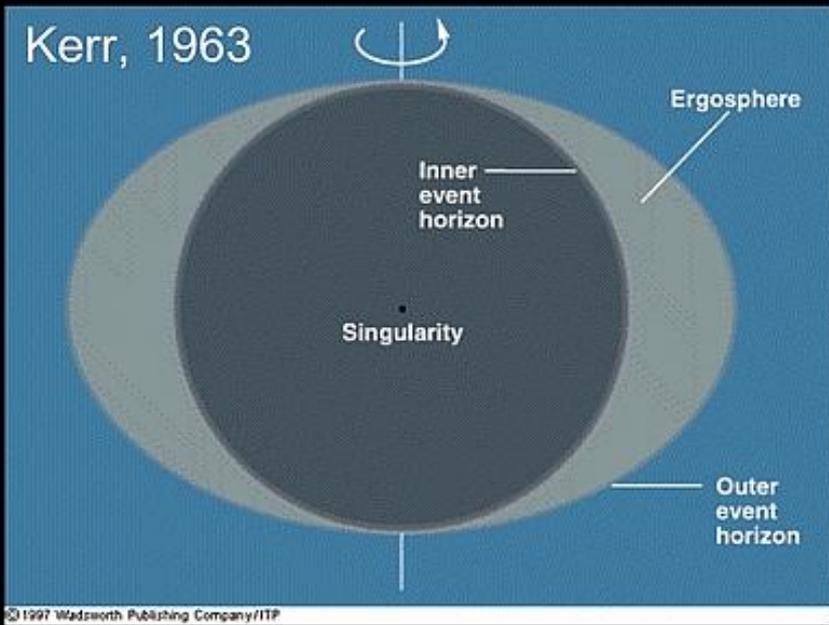
$$R_e = GM/C^2 + \sqrt{((GM/C^2)^2 - a^2/C^2 \cos^2(\theta))}$$

$$R_{outer} = GM/C^2 + \sqrt{((GM/C^2)^2 - a^2/C^2)}$$

$$R_{inner} = GM/C^2 - \sqrt{((GM/C^2)^2 - a^2/C^2)}$$



# Buco nero in rotazione



Si può entrare e uscire dall'ergosfera di un buco nero.

Nell'ergosfera è impossibile seguire una traiettoria radiale diretta verso il buco nero: lo spazio-tempo è trascinato dal moto di rotazione.

Tutta l'energia associata alla rotazione di un buco nero si trova immagazzinata nell'ergosfera e può dunque essere estratta.

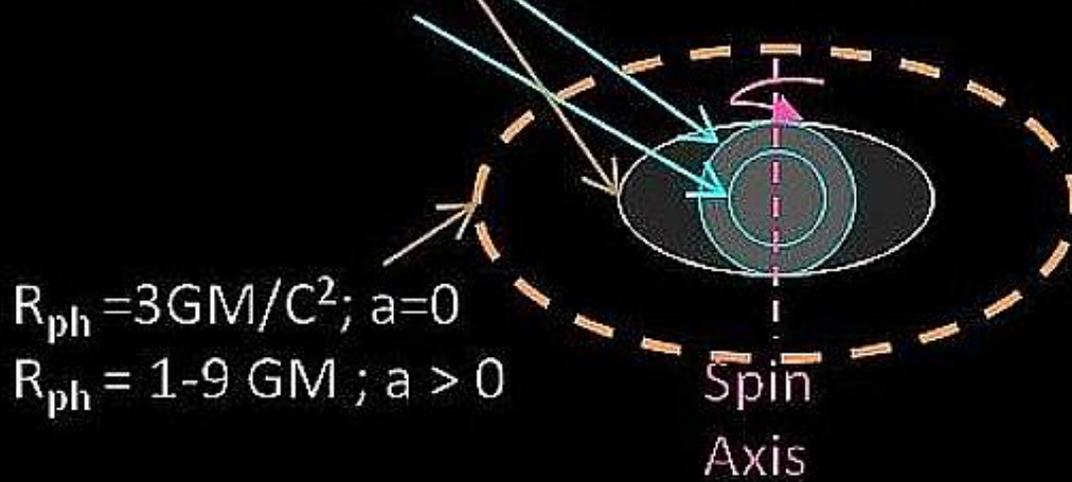
# Kerr – Newman Spinning Electrically Charged Black Hole

Ergosphere Radius and two event horizons

$$R_e = GM/C^2 + \sqrt{((GM/C^2)^2 - a^2/C^2 \cos^2(\theta) - q^2)}$$

$$R_{\text{outer}} = GM/C^2 + \sqrt{((GM/C^2)^2 - a^2/C^2 - q^2)}$$

$$R_{\text{inner}} = GM/C^2 - \sqrt{((GM/C^2)^2 - a^2/C^2 - q^2)}$$



$$R_{\text{ph}} = 3GM/C^2; a=0$$

$$R_{\text{ph}} = 1.9 GM; a > 0$$

Spin  
Axis

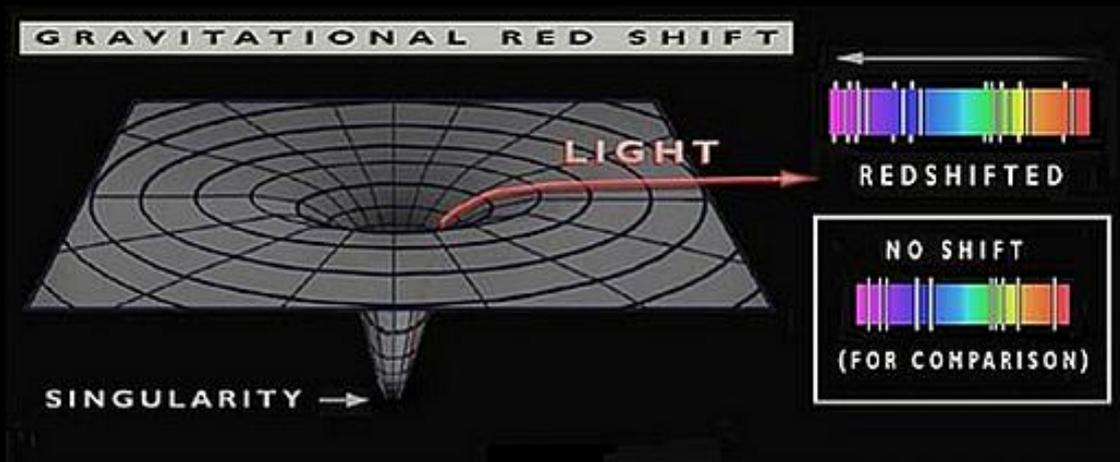
# Qualche spiegazione...

Black Hole Radii for Different Black Hole Types. All black holes have a radius between  $GM/C^2$  and  $2GM/C^2$ . The classical Schwarzschild black hole most often derived in text books (was originally called a dark star by Michell/Laplace 1796) can keep light from escaping, but light can be seen at infinity ( $R_f = \infty$ ). A classical finite (twice) height black hole with final height  $R_f = 2GM/C^2$  has a radius  $R_{c2xbh} = GM/C^2$ . All the remaining black holes would also not let light escape beyond a maximum height of  $R_f = 2GM/C^2$ . All these black holes have photon sphere radii,  $R_{ph}$  that bends light in circular orbits  $R_{ph} = GM/C^2$  to  $3GM/C^2$  (and larger) for spinning black holes. All the stationary black holes (on the top) are expected to collapse into a singularity at the center. However, the spinning and charged black holes (on the bottom) can keep themselves from collapsing using spin or a repulsive charge force. A spinning black hole is larger at its equator just like the spinning earth due to centrifugal forces (forming an elliptical shape called an ergosphere). Spinning black holes also drags space around at its event horizon. If one incorporates quantum mechanics into the black hole equations, one would get identical answers but some of the mass and radii values may need to come in discrete legal values, possibly at resonance frequencies with the gravitational waves.

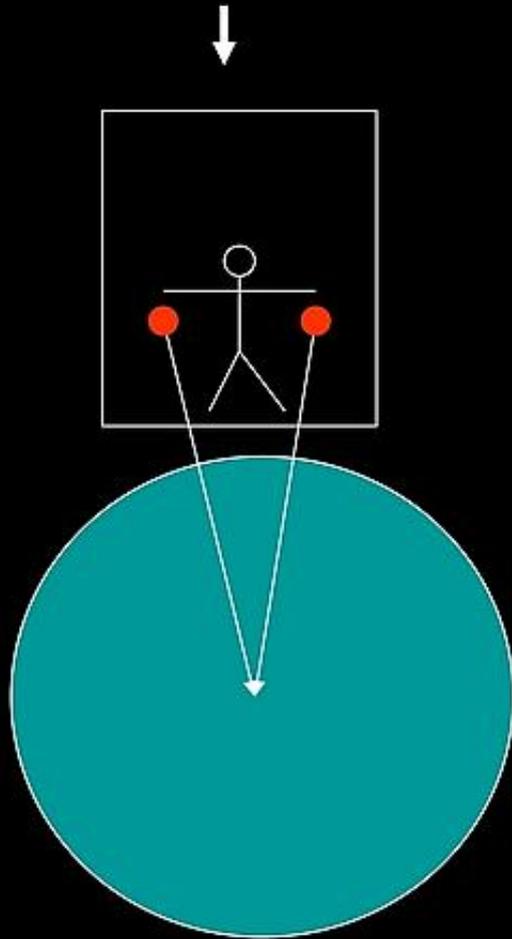
# Caduta in un buco nero

Visto da un osservatore esterno, il tempo di caduta sull'orizzonte di un buco nero è infinito.

Un osservatore che cade in un buco nero misura invece un tempo finito di caduta nella singolarità.

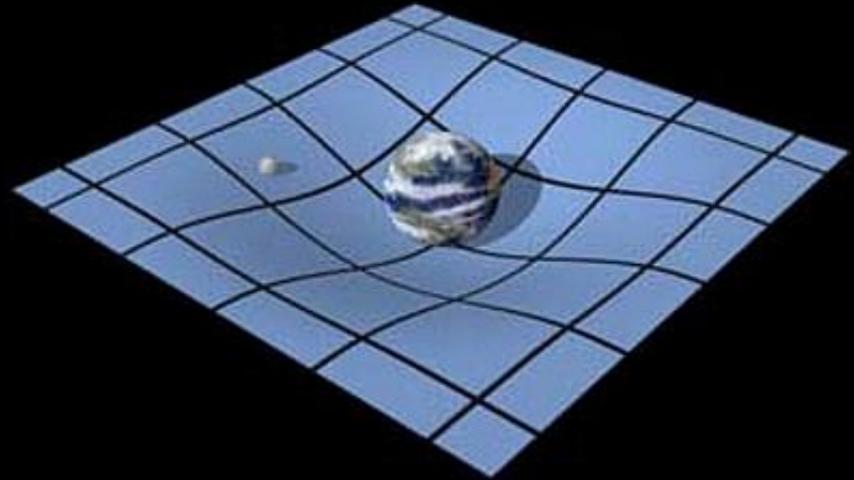


# Marea = Curvatura



Effetti di marea → curvatura ineliminabile

La curvatura dello spazio può essere molto pericolosa...



# Attenzione alle forze di marea!

Vicino all'orizzonte degli eventi, le forze di marea diventano fortissime (se il buco nero non è supermassiccio)

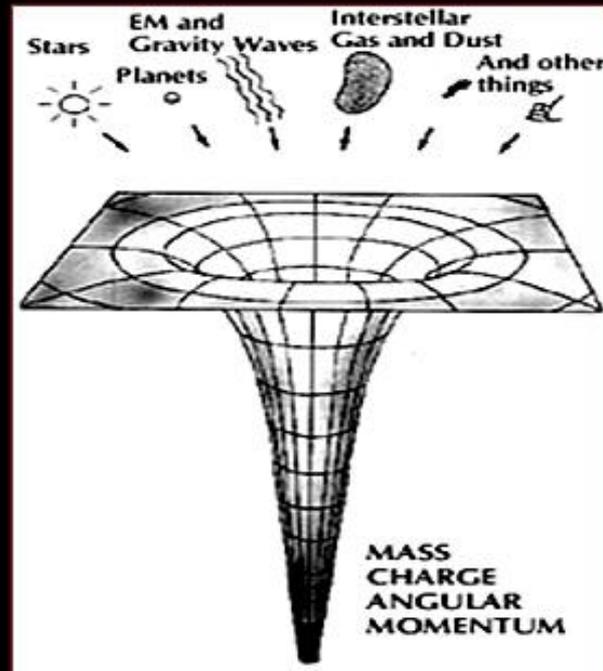


SPAGHETTIFICAZIONE

E' meglio cadere in un buco nero molto grosso (di miliardi di masse solari) che in uno "piccolo" di poche masse solari.



# Teorema della calvizie



Un buco nero divora tutto e si manifesta unicamente attraverso la sua massa e la sua rotazione (e la carica elettrica).

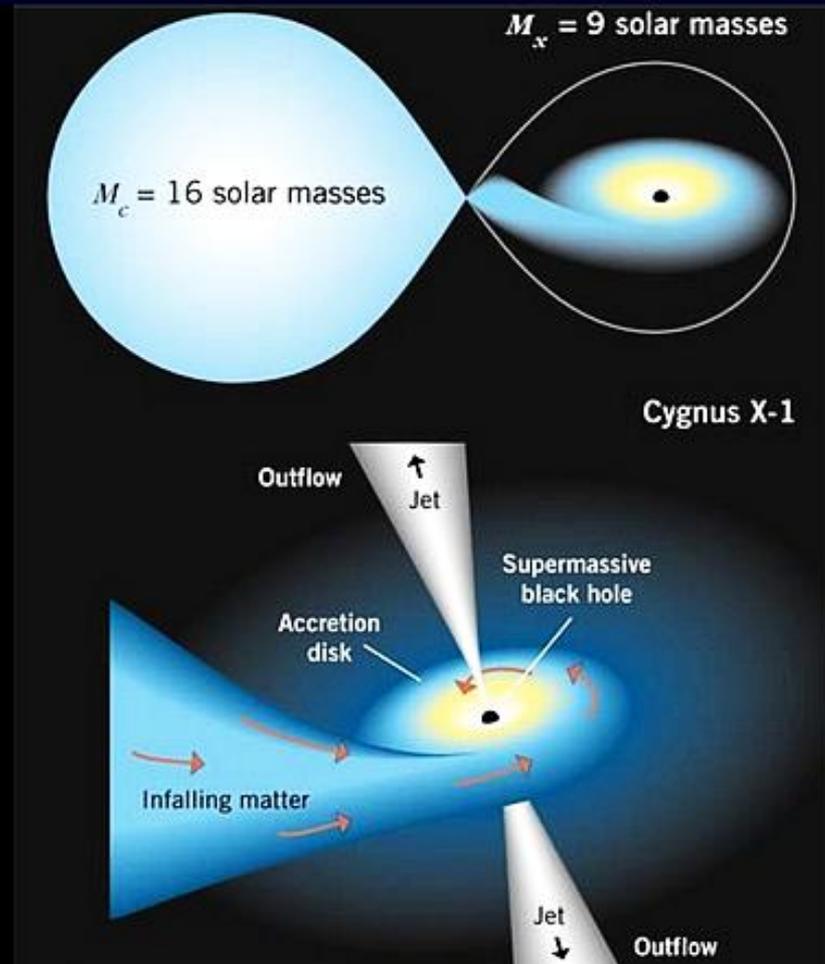
# I buchi neri interagiscono con l'ambiente

I buchi neri si manifestano indirettamente attraverso gli effetti indotti sull'ambiente che li circonda dalla loro estrema gravità.

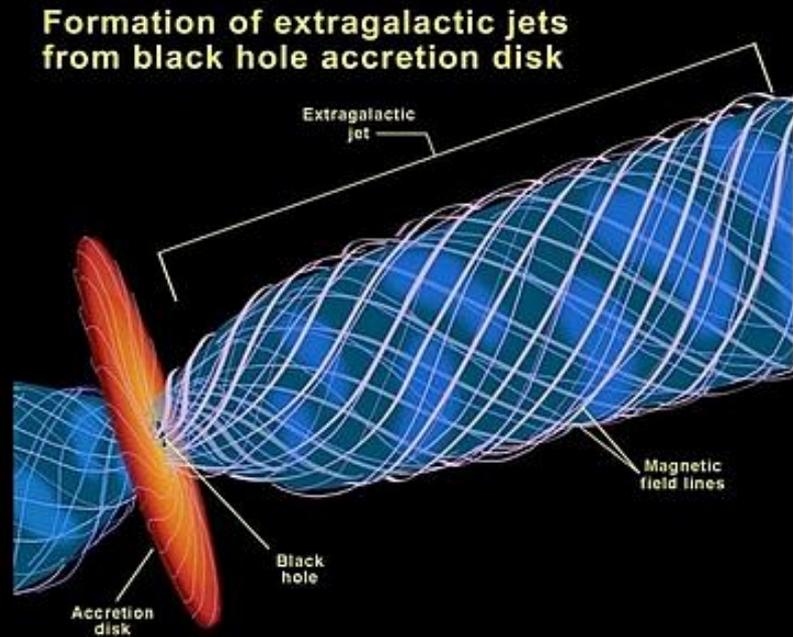
L'accrescimento di gas porta a un'intensa emissione di radiazione vicino al buco nero.

# Cygnus X-1

Sistema binario a 8000 anni-luce dalla Terra

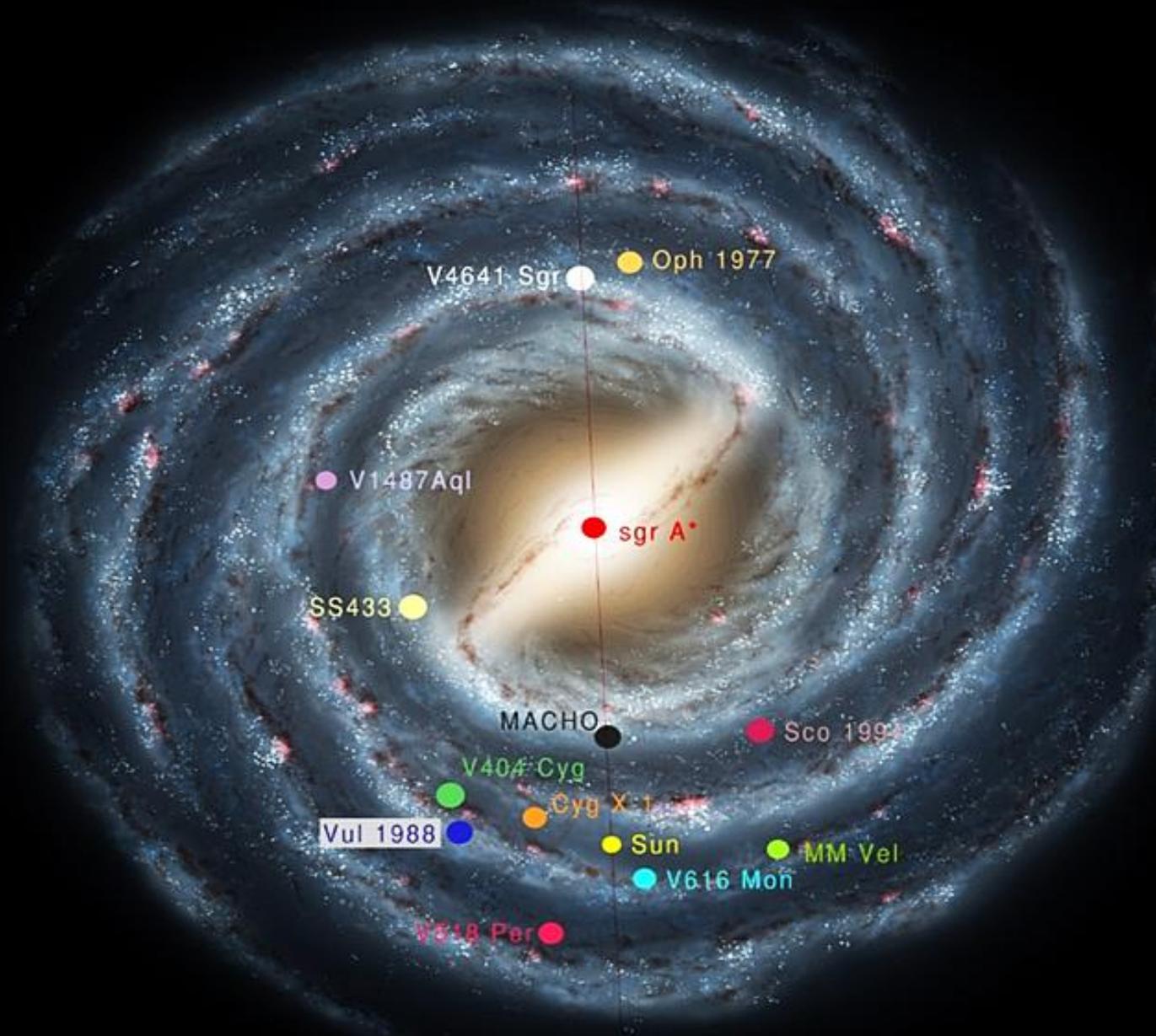


# Attenzione a ciò che circonda il buco nero!



Il disco di accrescimento è gas molto caldo: avvicinandosi all'orizzonte del buco nero viene emessa radiazione sempre più energetica, fino all'X e al gamma.

I getti sono un plasma di particelle che procedono a velocità relativistiche.



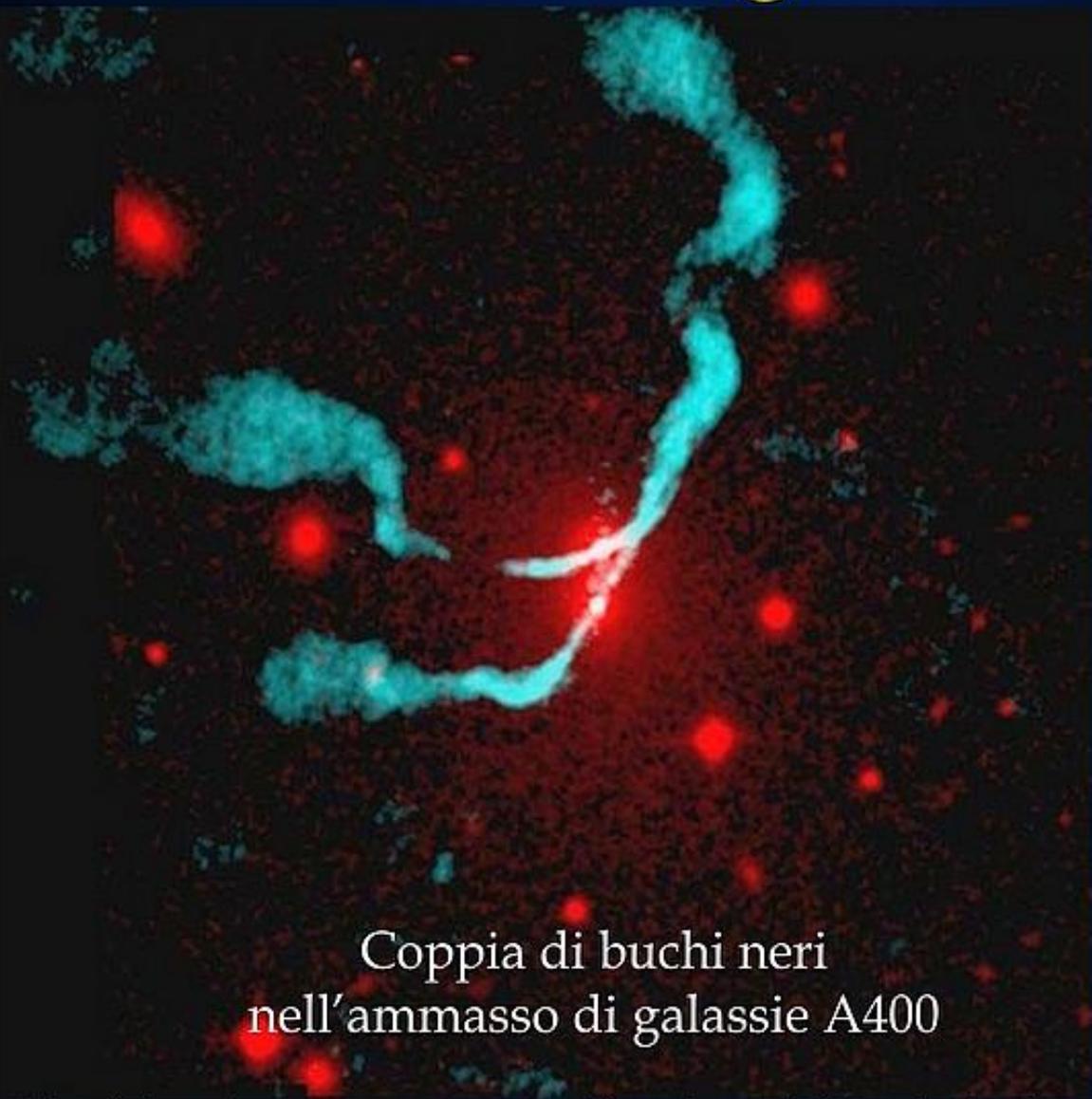
vi è qualche milione di buchi neri nella nostra Galassia

...e se un buco nero entrasse nel  
Sistema Solare?

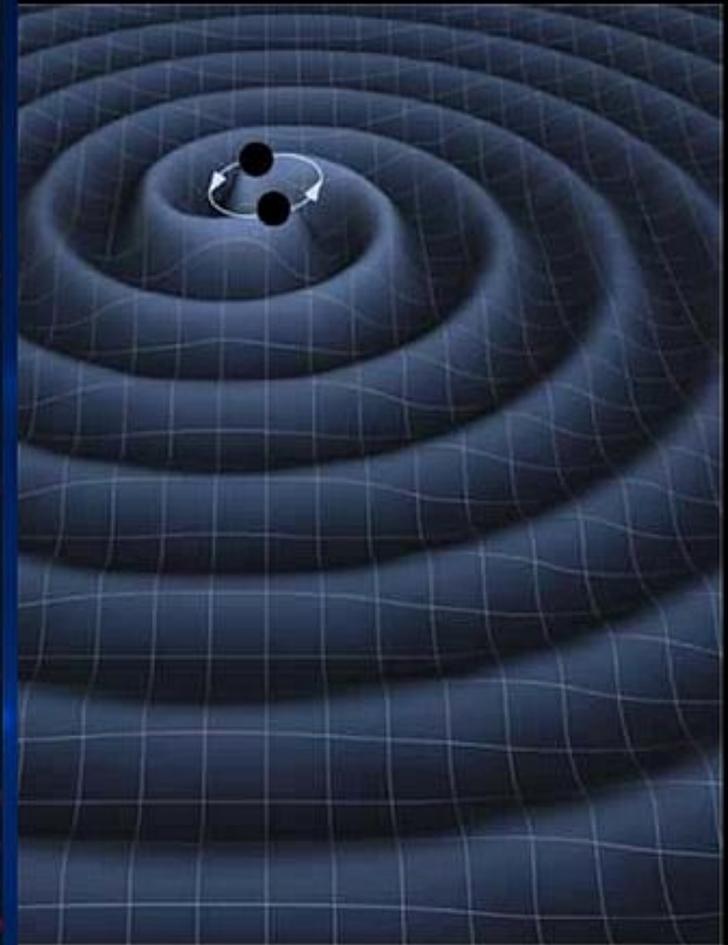


Probabilità di una collisione con un buco nero:  $1/10^{26}$  all'anno

# Onde gravitazionali



Coppia di buchi neri  
nell'ammasso di galassie A400



I buchi neri possono trovarsi in sistemi binari destinati a fondersi liberando una grande energia sotto forma di onde gravitazionali, molto pericolose per chi si trovi nei paraggi

# Il Centro della Galassia

# La Galassia

Sole

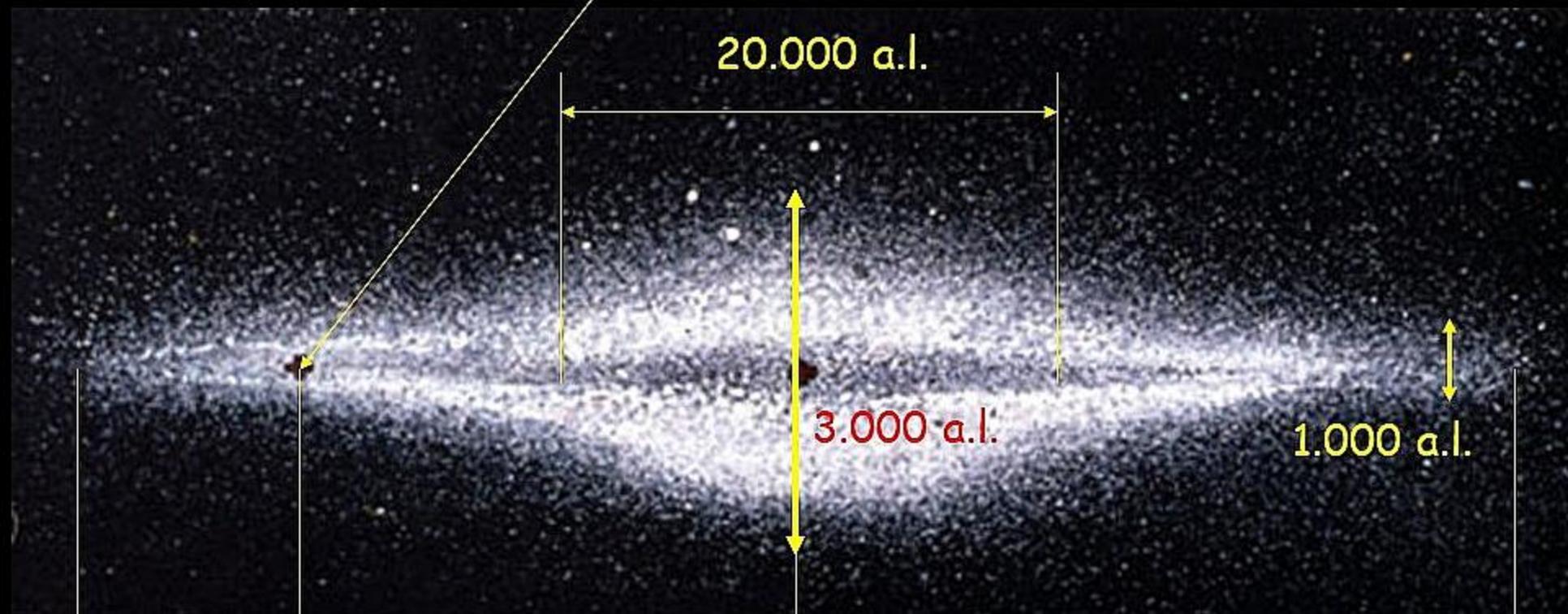
20.000 a.l.

3.000 a.l.

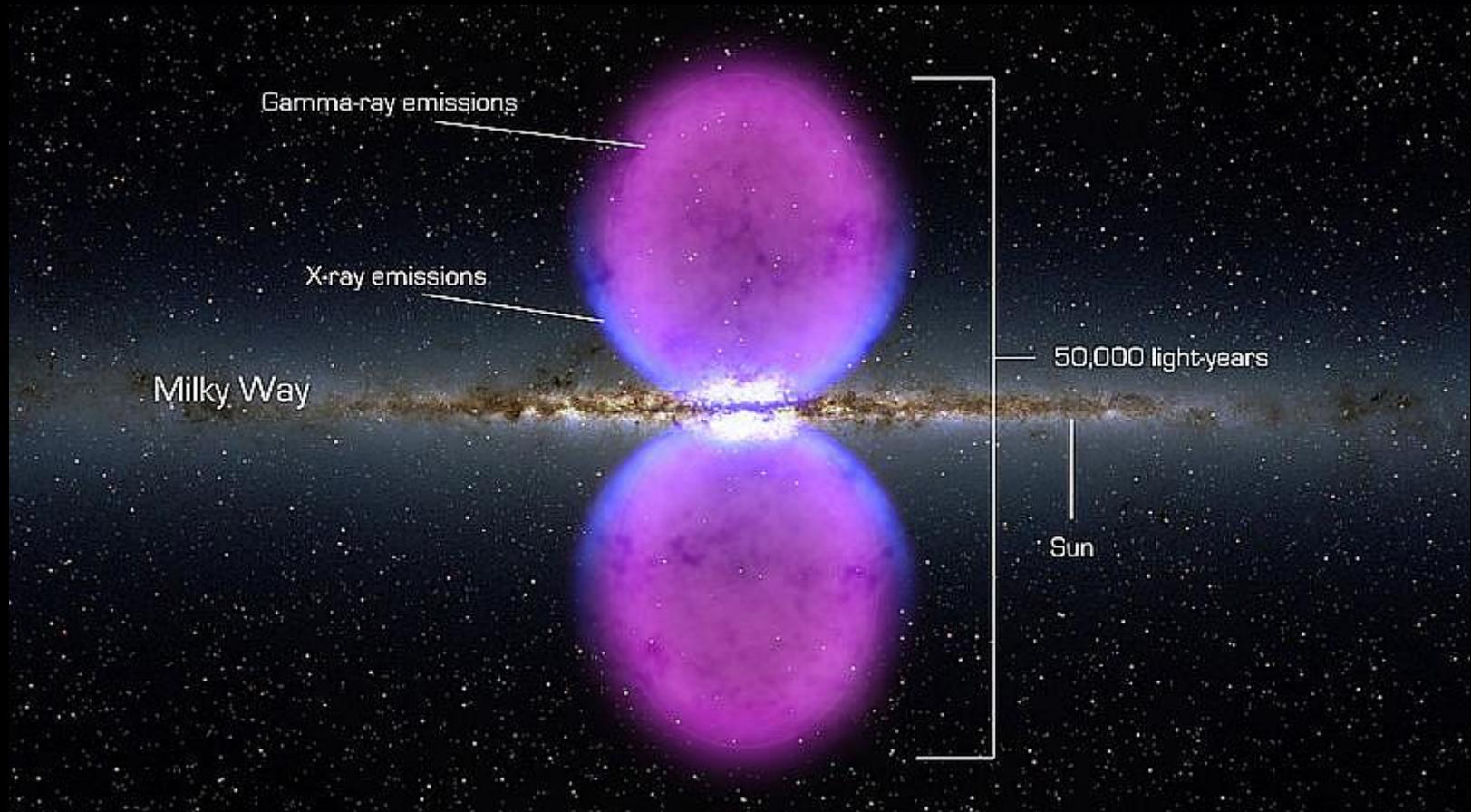
1.000 a.l.

30.000 a.l.

100.000 a.l.

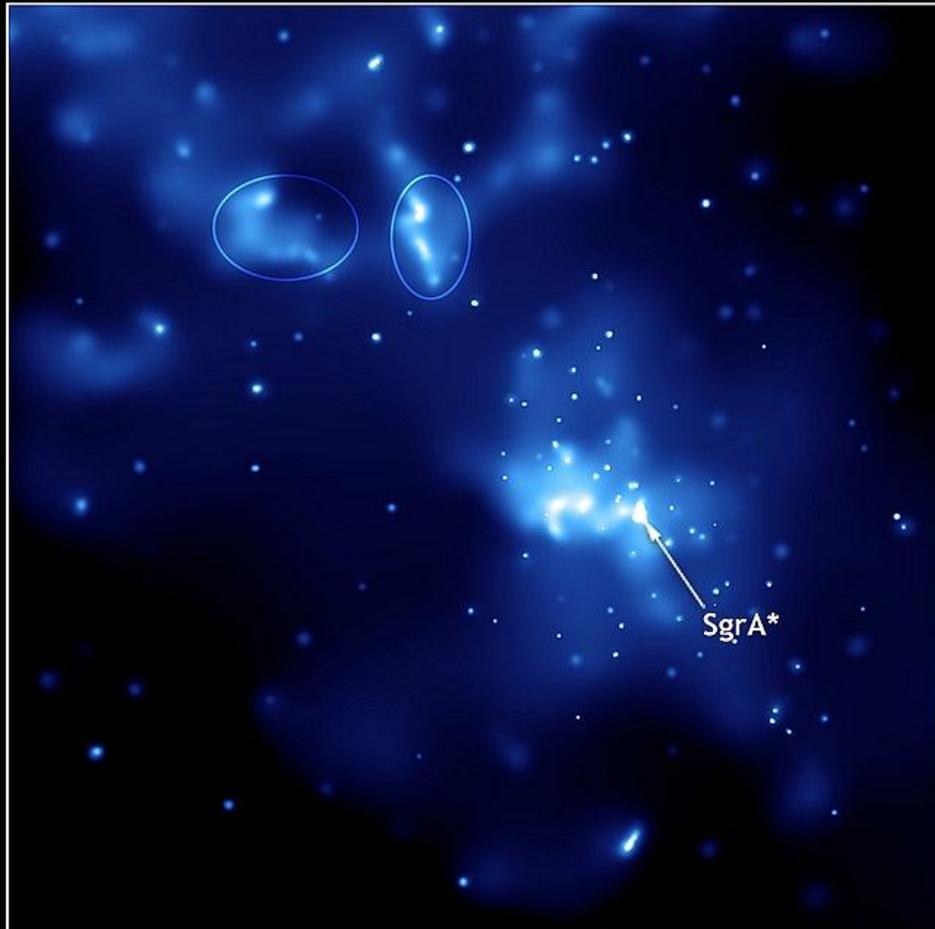
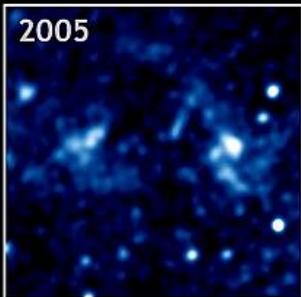
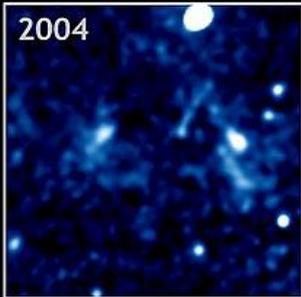
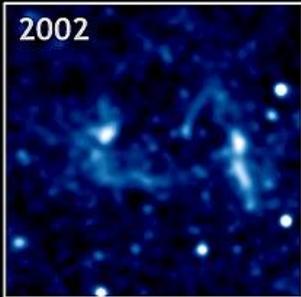


# Il centro galattico

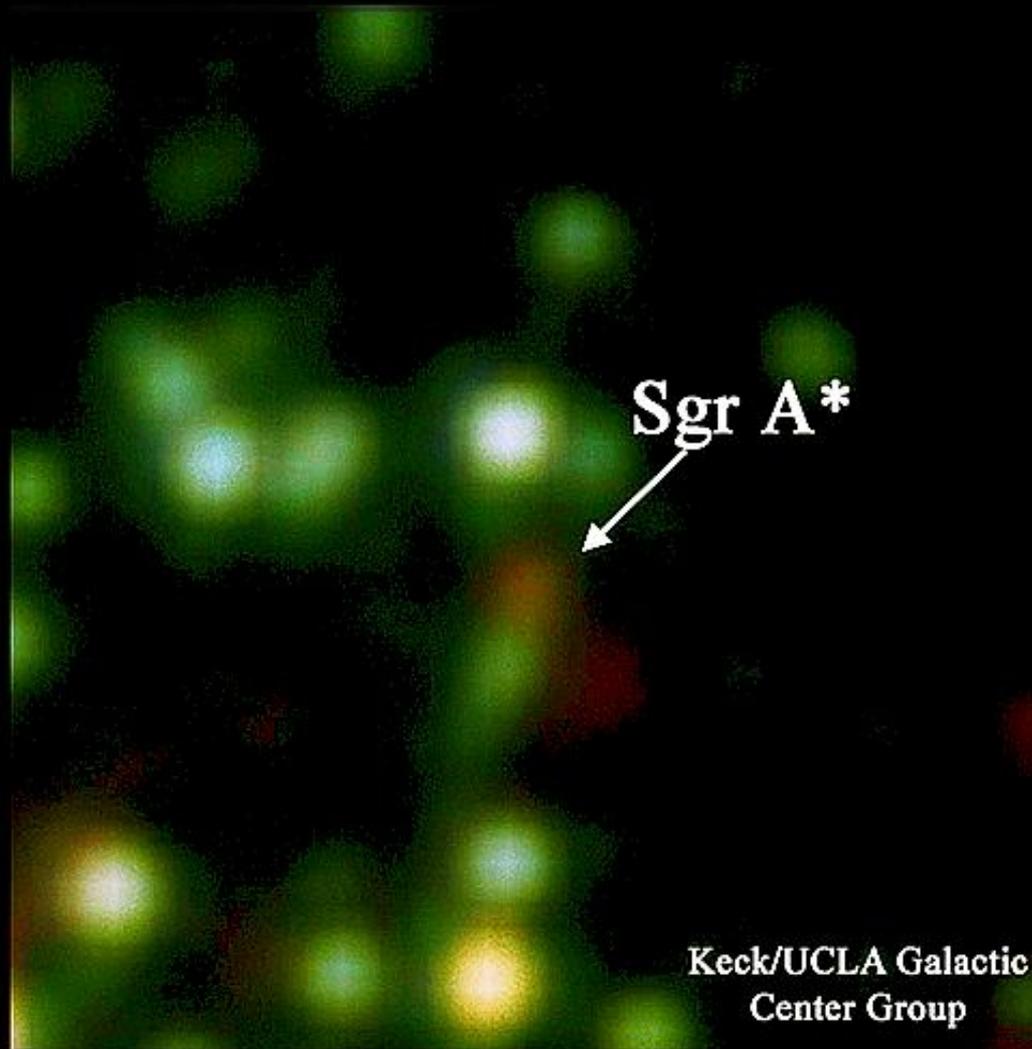


# Il Centro della Galassia

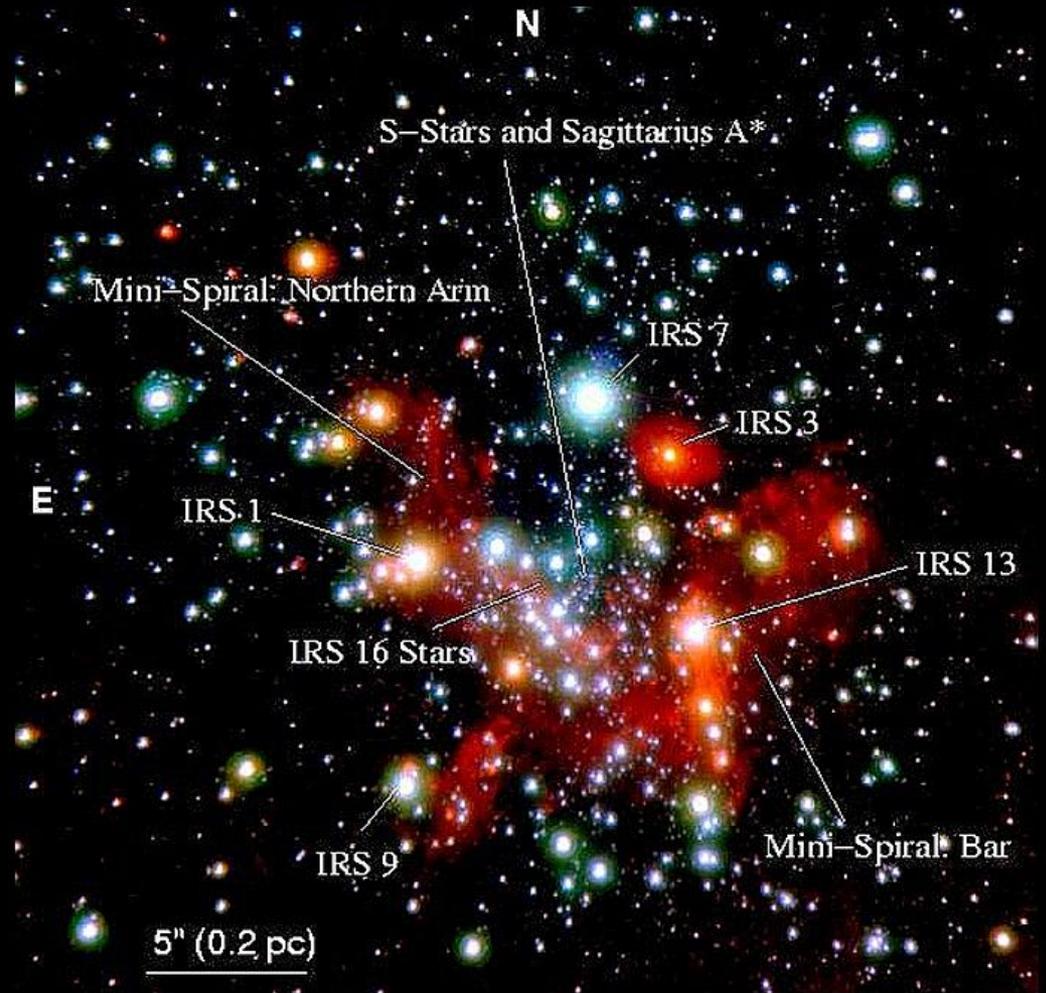
Sagittarius A



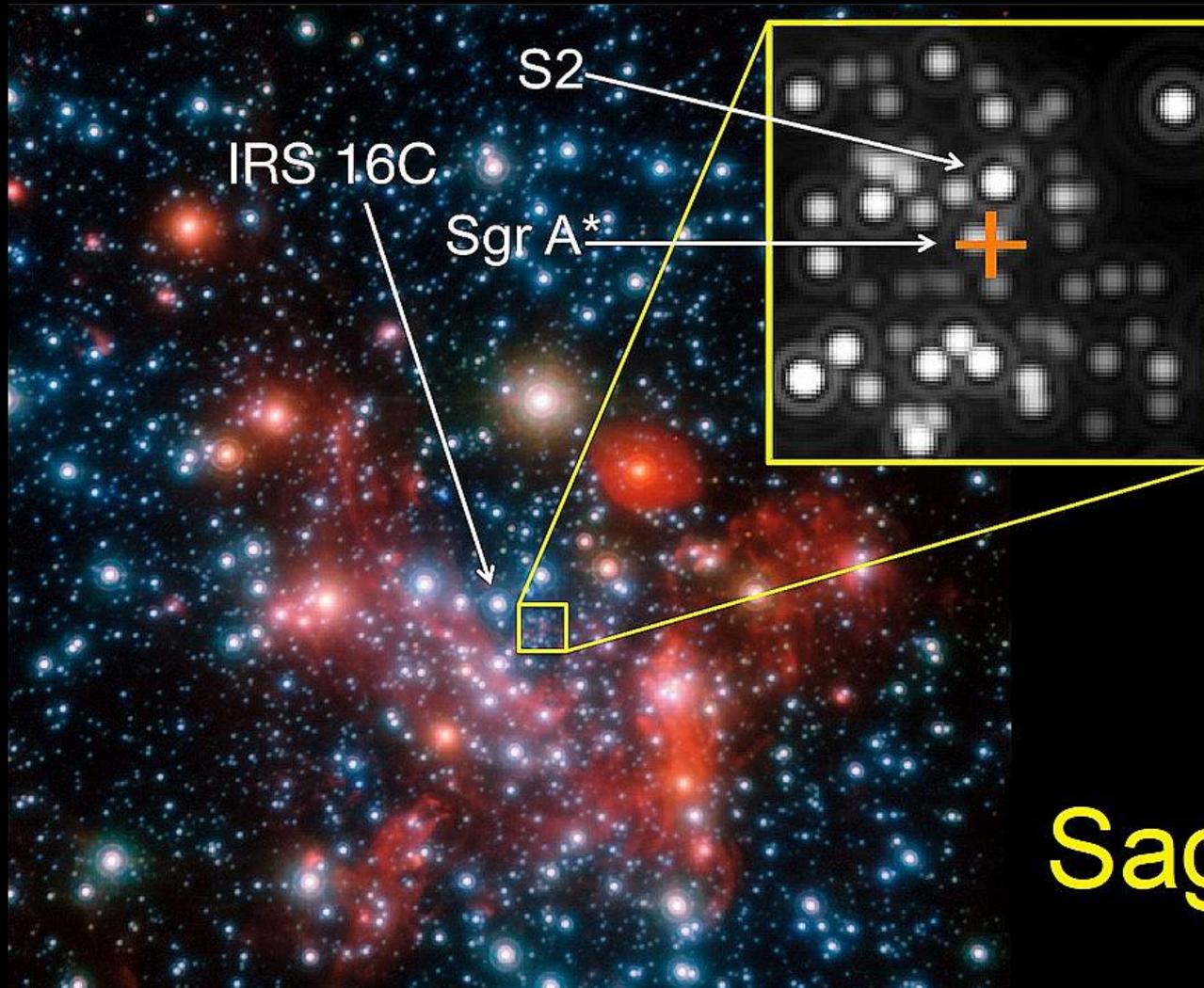
# Il buco nero al centro della nostra Galassia



# Sagittarius A



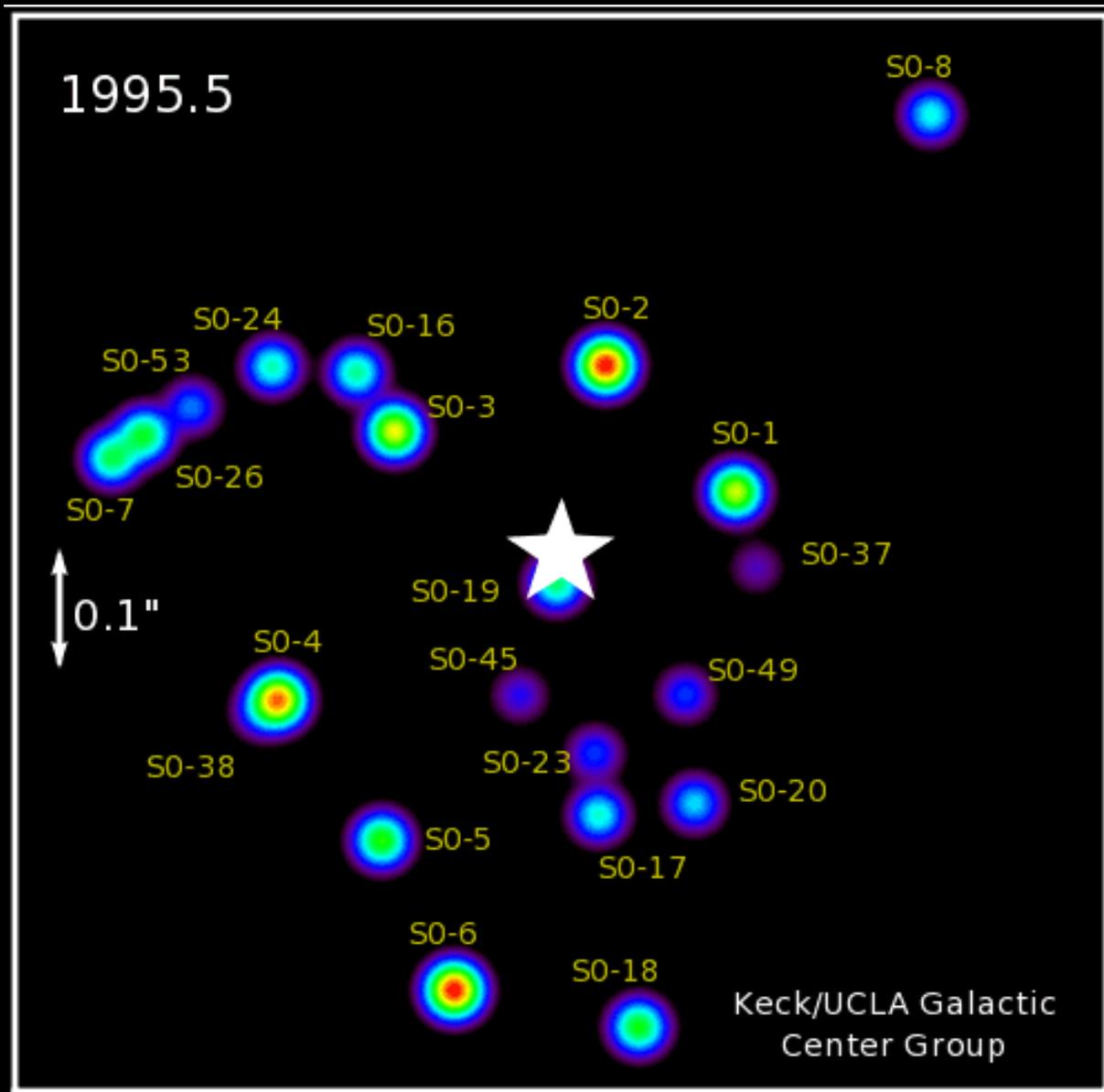
# Il Centro della Galassia



Sagittarius A

# Centro Galattico

Orbite delle stelle supermassive intorno al buco nero centrale



# Sagittarius A

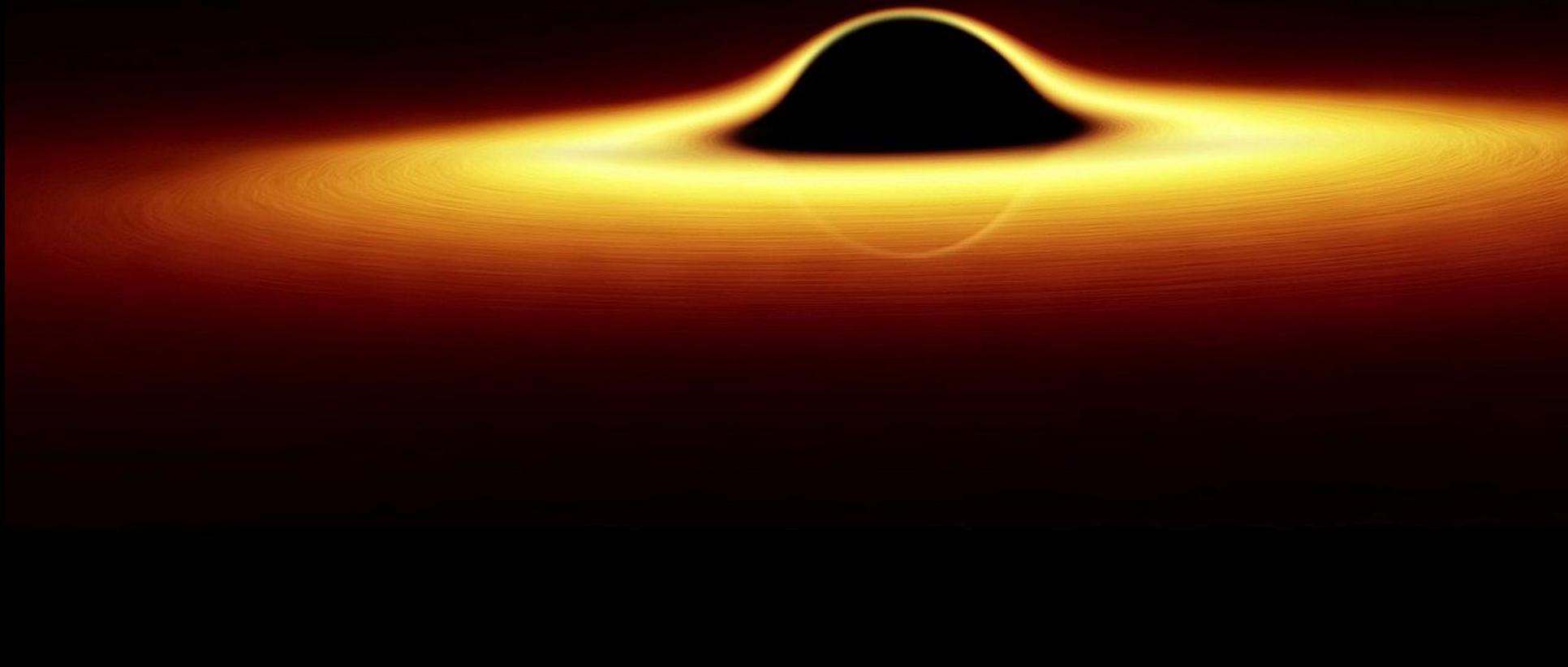
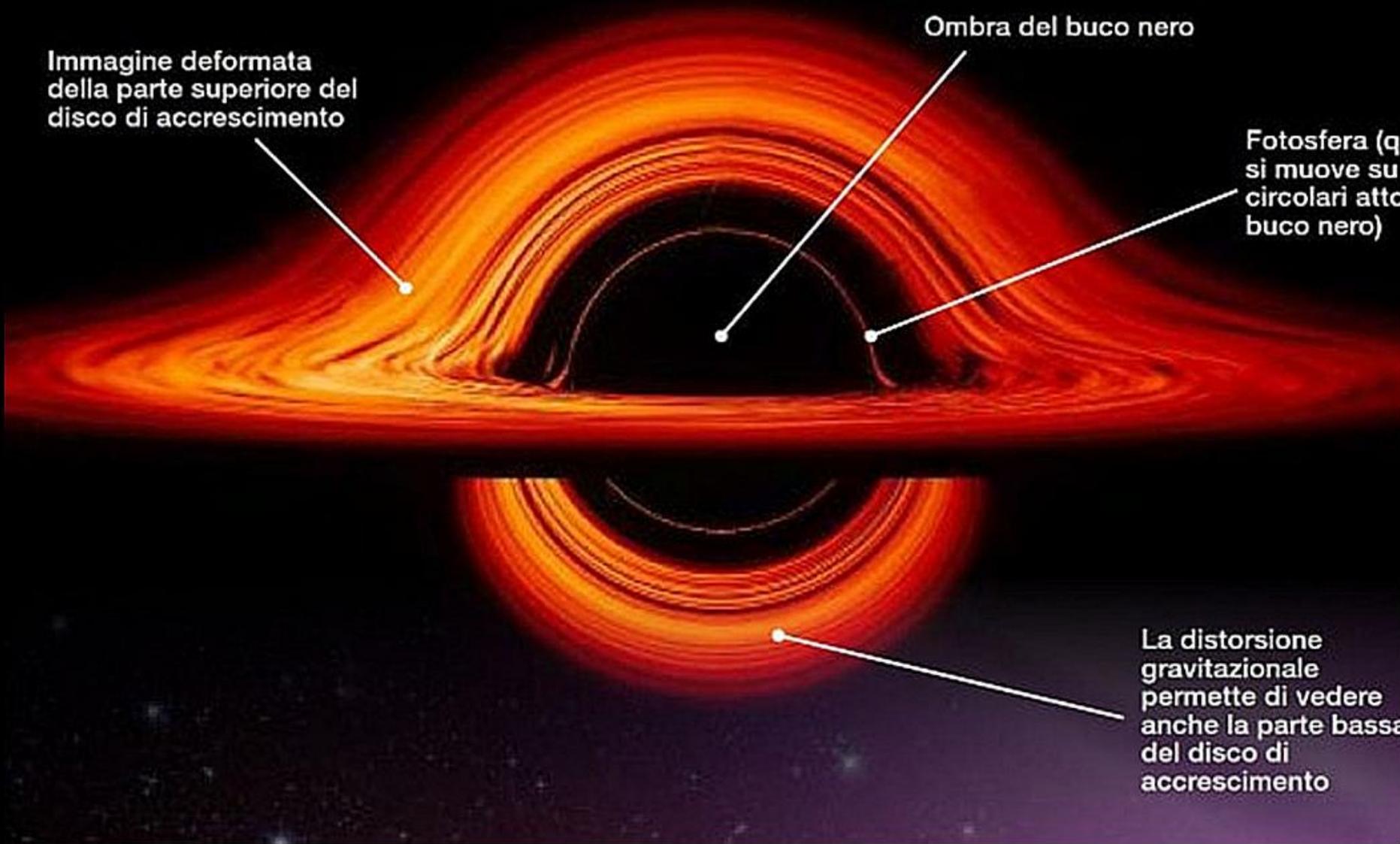


Immagine deformata  
della parte superiore del  
disco di accrescimento

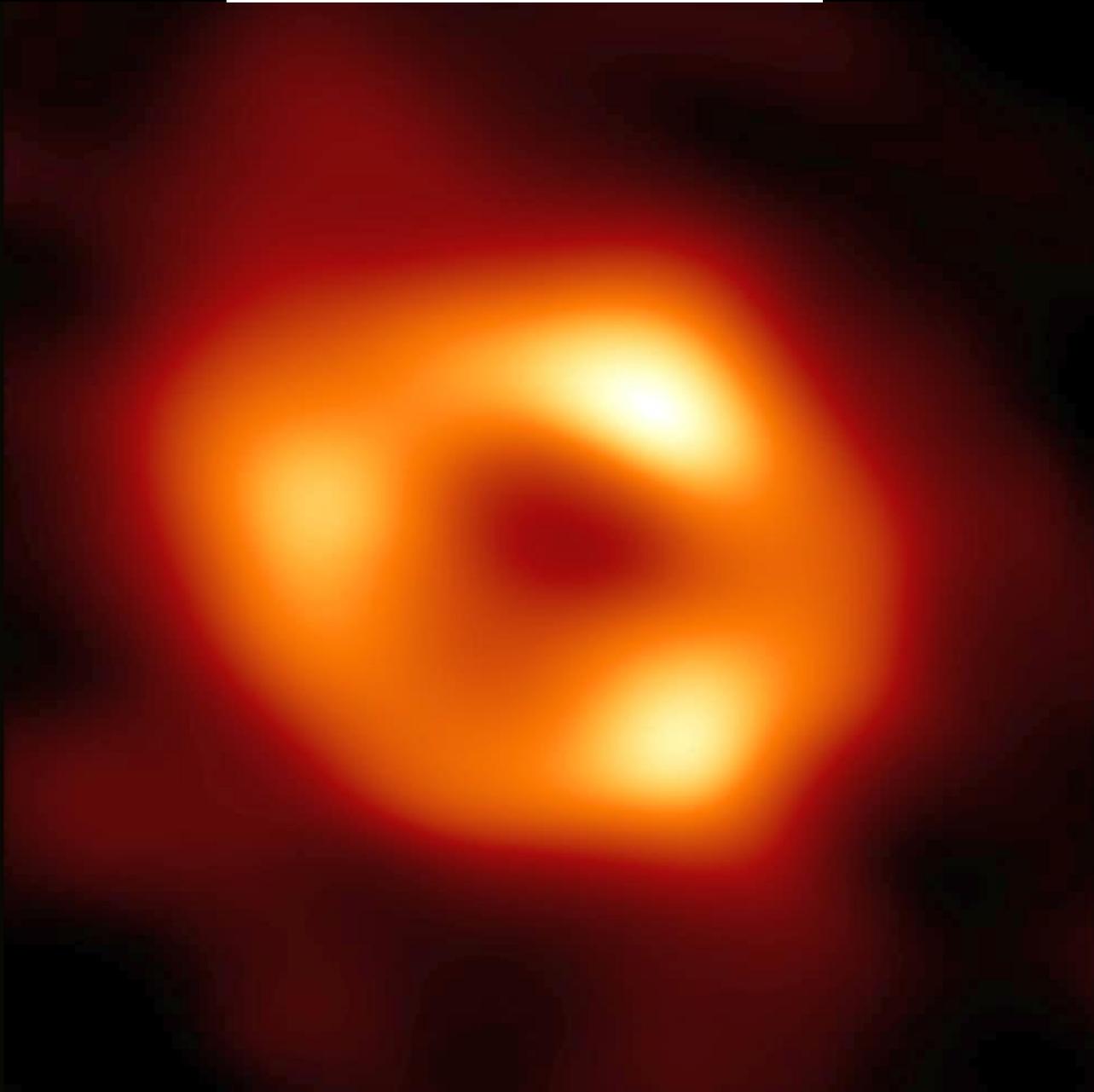
Ombra del buco nero

Fotosfera (q  
si muove su  
circolari atto  
buco nero)

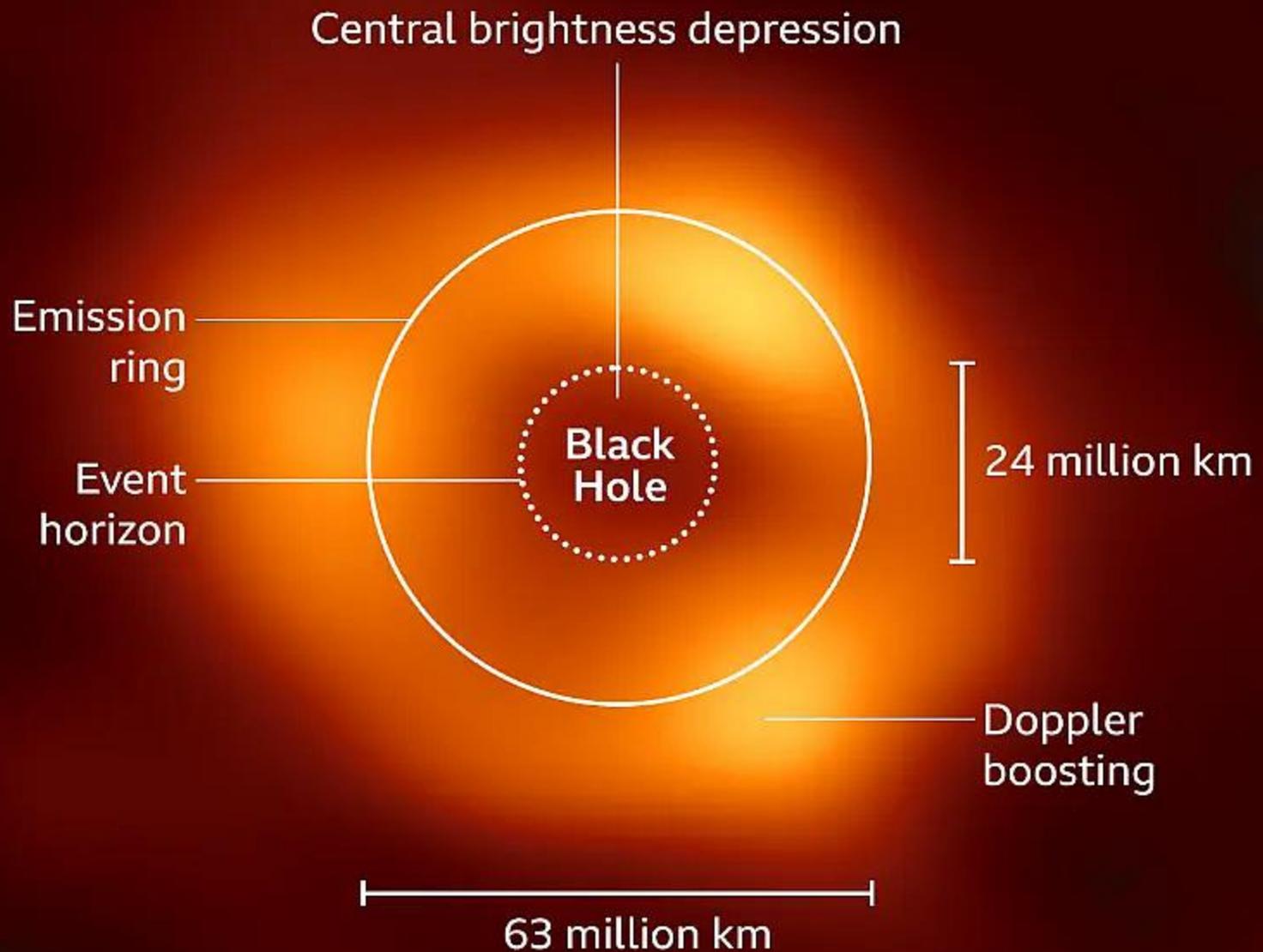
La distorsione  
gravitazionale  
permette di vedere  
anche la parte bassa  
del disco di  
accrescimento



# Sagittarius A

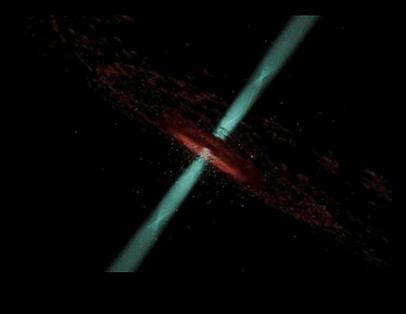
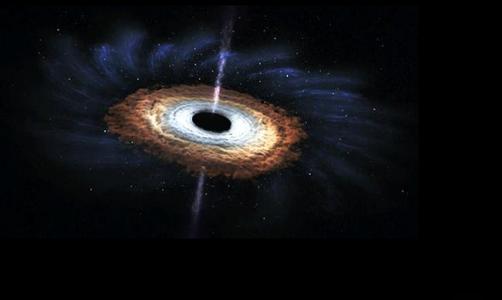


# Deciphering the image of Sagittarius A\*



# Sagittarius A

## Il centro galattico



## M87 - Tipo E3

È una galassia ellittica gigante distante circa 50 milioni di a.l.

È la galassia al centro dell'ammasso della Vergine.

È quattro volte più luminosa di quanto la nostra Via Lattea apparirebbe alla stessa distanza. M49 è più luminosa del 22%.



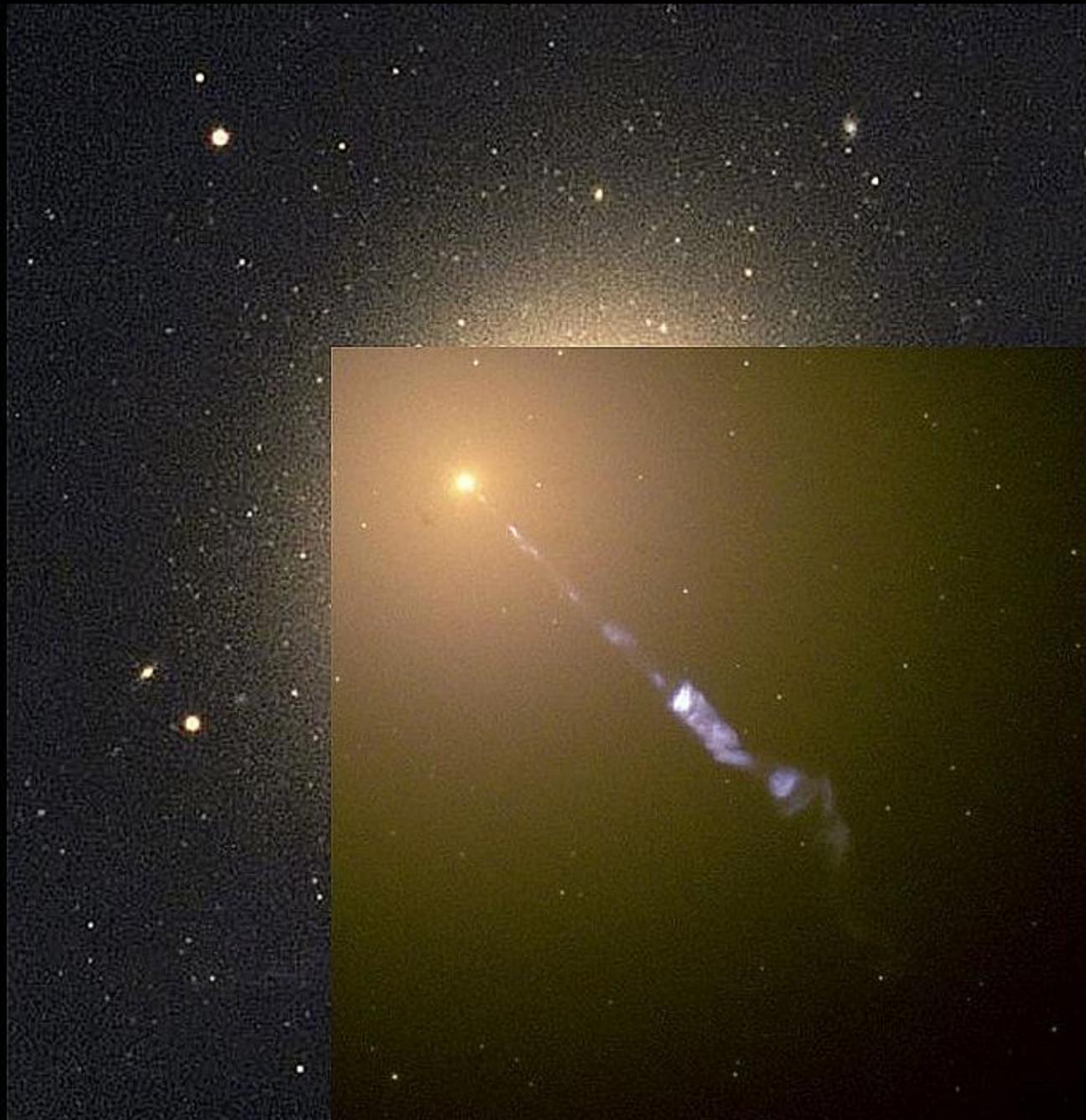
## M87 - Tipo E3

È una galassia ellittica gigante distante circa 50 milioni di a.l.

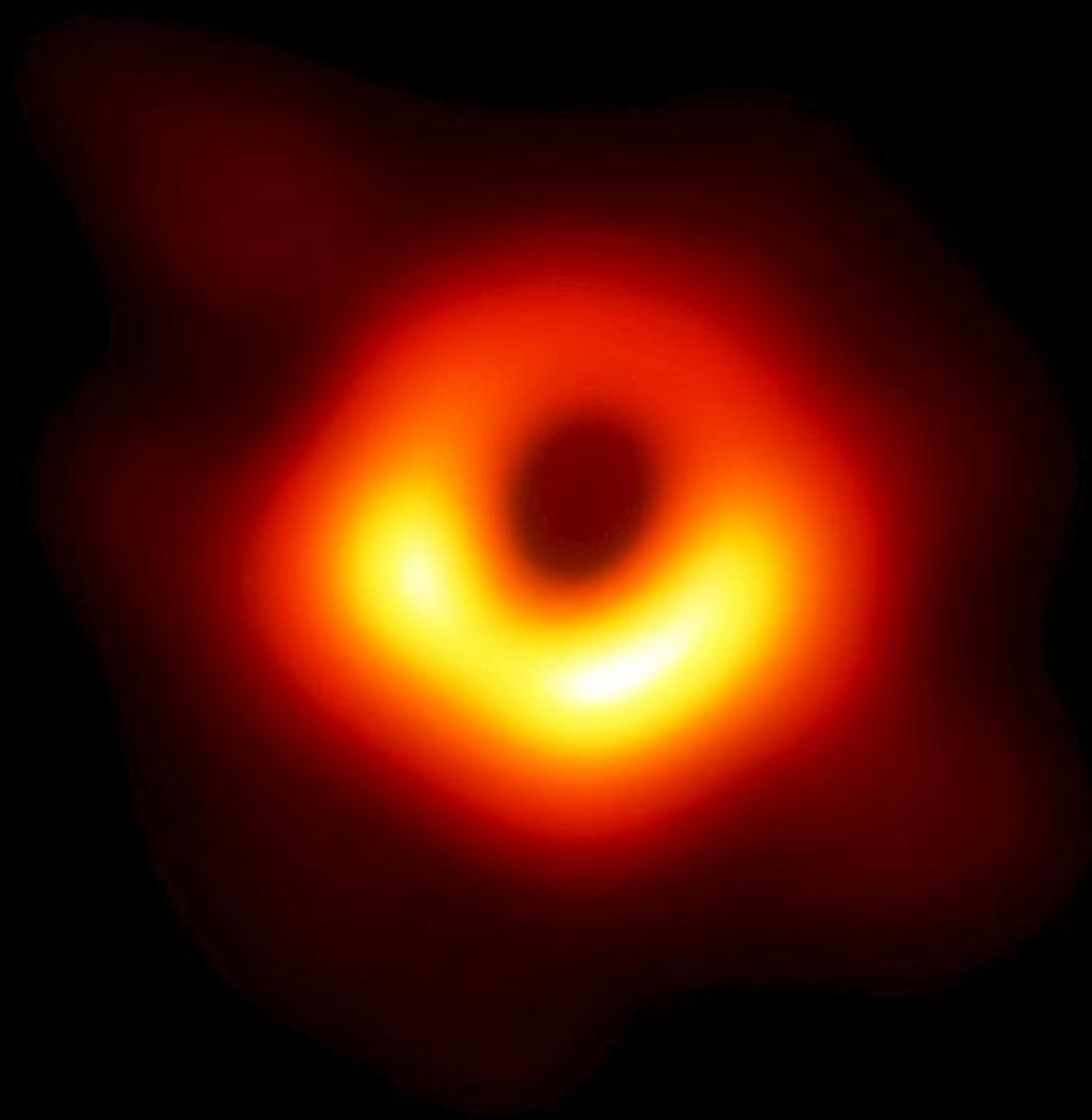
È la galassia al centro dell'ammasso della Vergine.

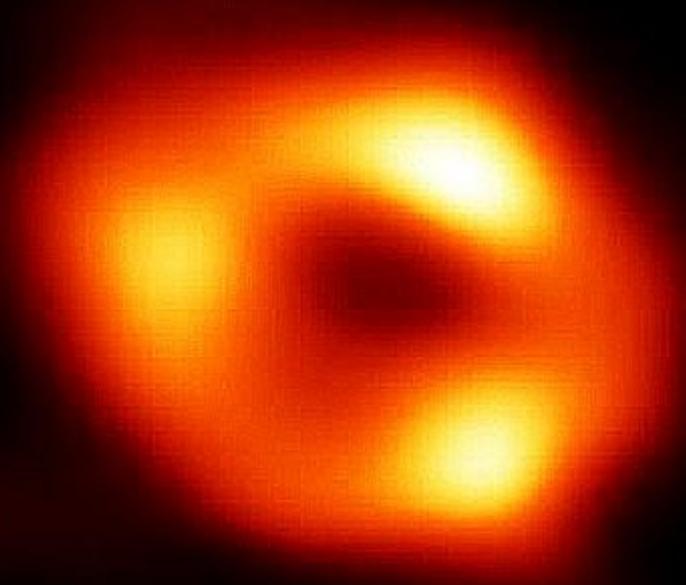
È quattro volte più luminosa di quanto la nostra Via Lattea apparirebbe alla stessa distanza. M49 è più luminosa del 22%.

Ospita l'intensa radiosorgente Virgo A e l'emissione associata al suo nucleo galattico attivo.

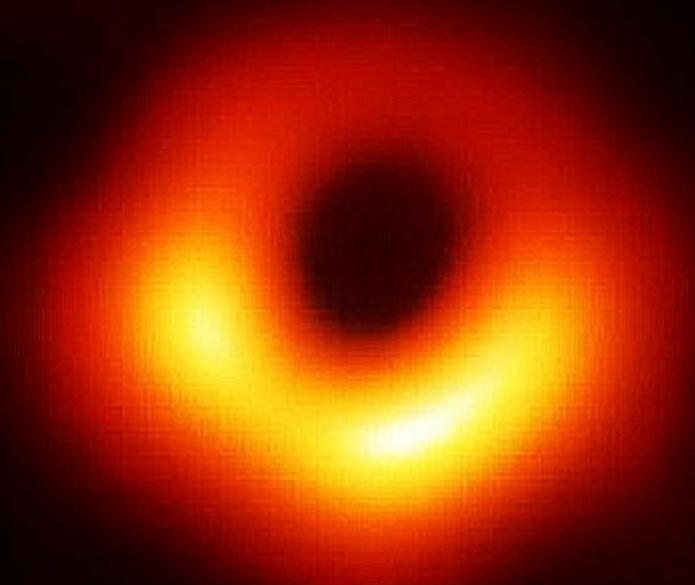


M87



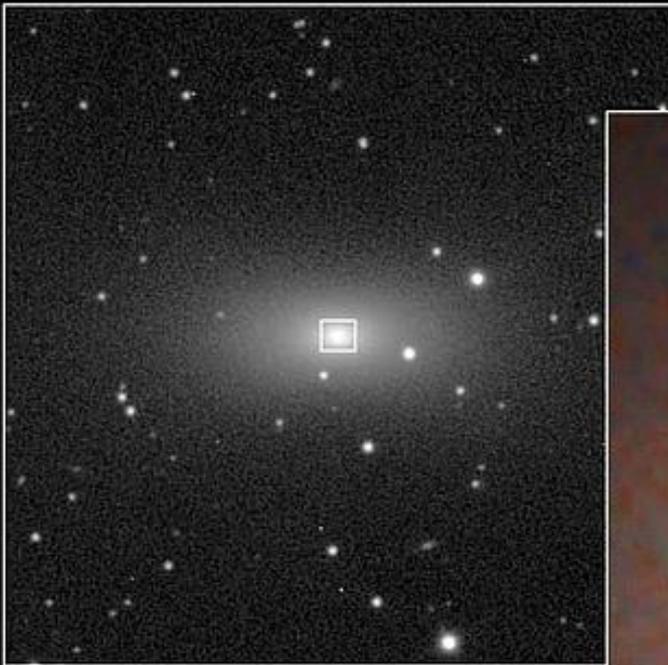


**Sagittarius A\***

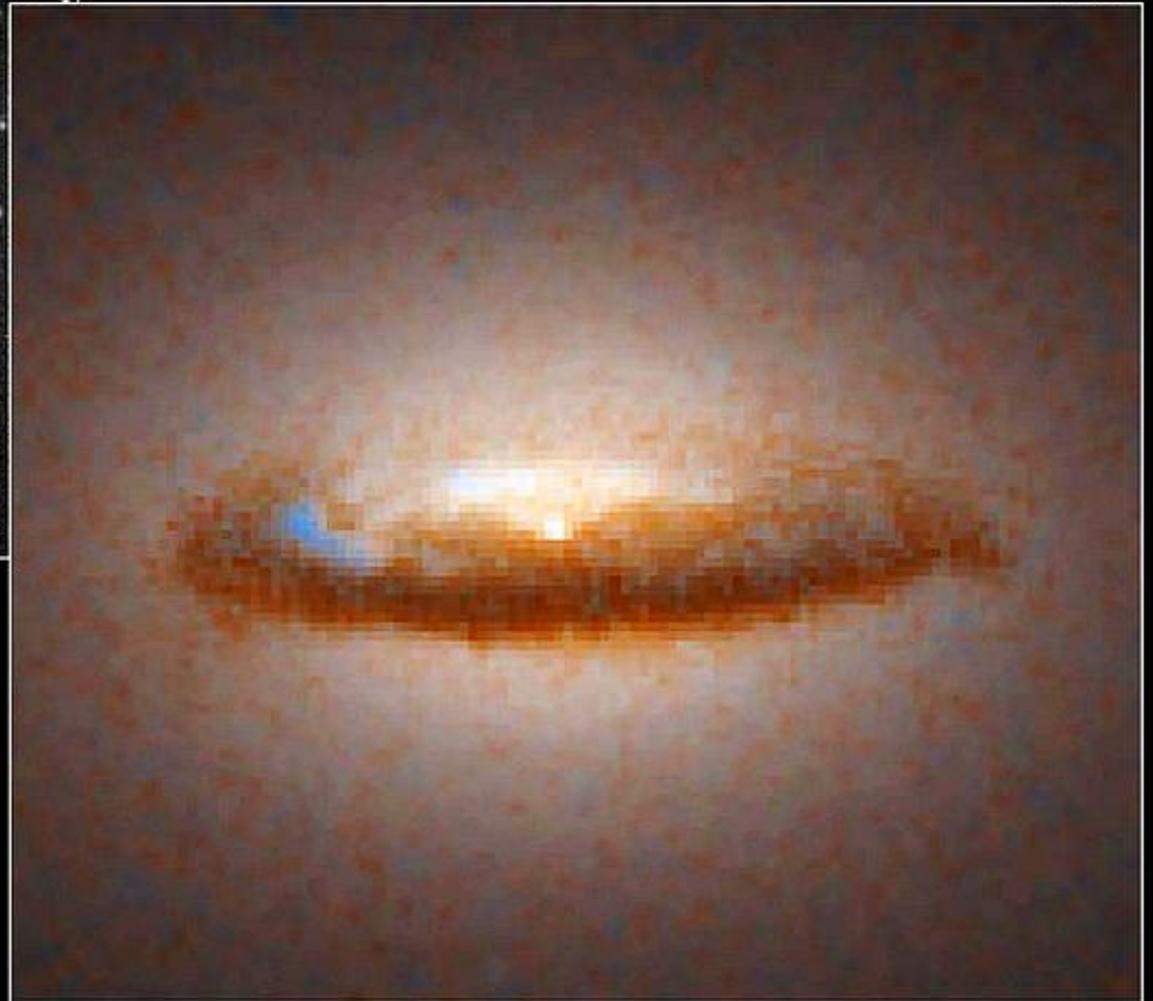


**M87**

HST



Ground



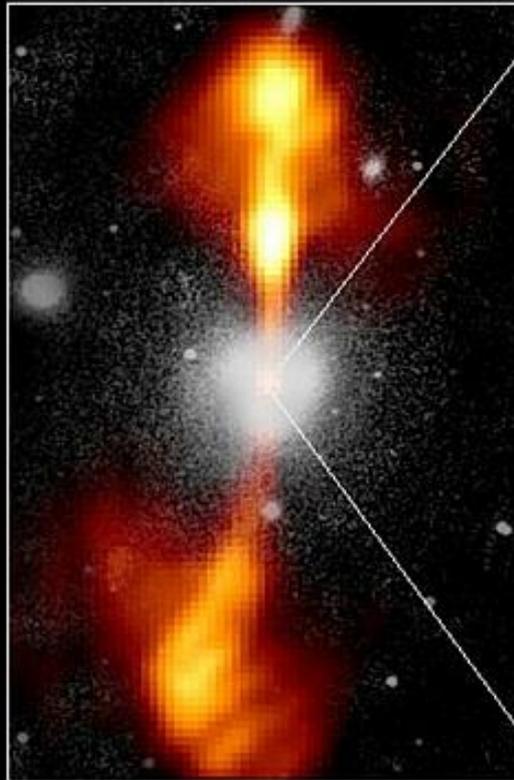
**Disk around a Black Hole in Galaxy NGC 7052**  
Hubble Space Telescope • Wide Field Planetary Camera 2

# Core of Galaxy NGC 4261

Hubble Space Telescope

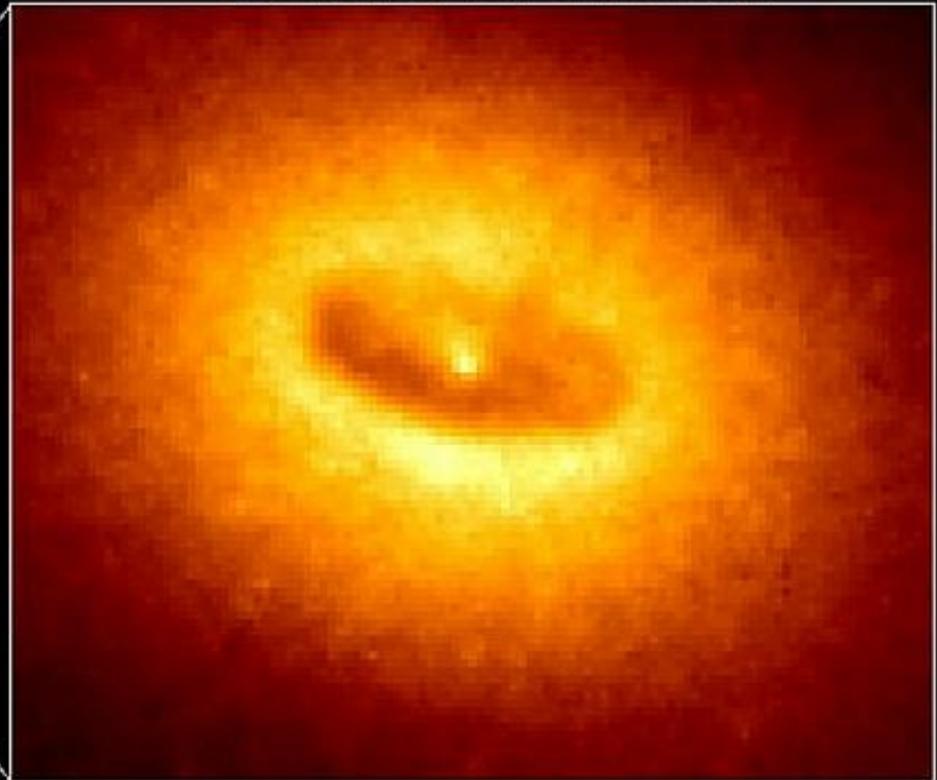
Wide Field / Planetary Camera

Ground-Based Optical/Radio Image



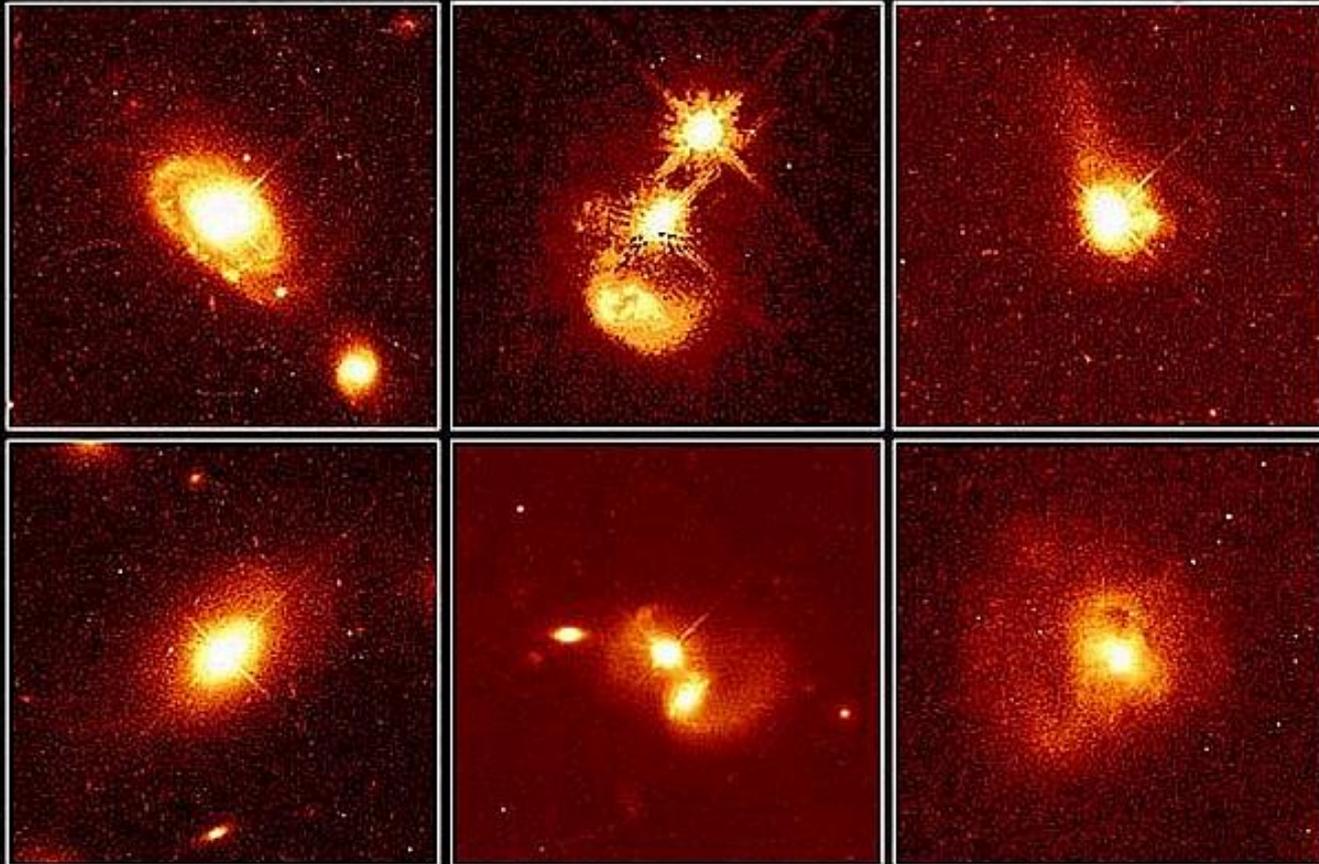
380 Arc Seconds  
88,000 LIGHT-YEARS

HST Image of a Gas and Dust Disk



17 Arc Seconds  
400 LIGHT-YEARS

# I Quasar

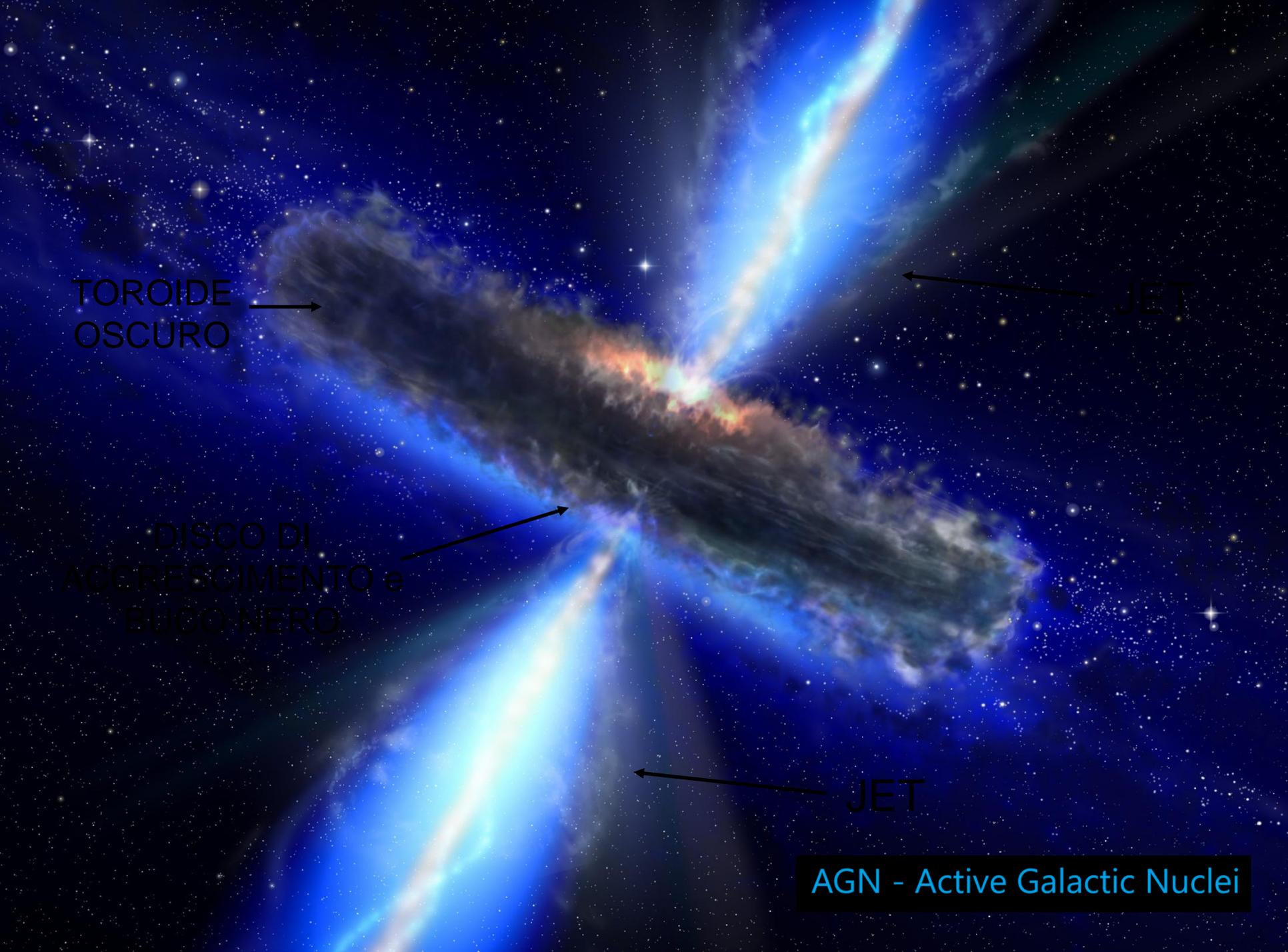


**Quasar Host Galaxies**

**HST • WFPC2**

PRC96-35a • ST ScI OPO • November 19, 1996

J. Bahcall (Institute for Advanced Study), M. Disney (University of Wales) and NASA



TOROIDE  
OSCURO

JET

DISCO DI  
ACCRESCIMENTO e  
BUCO NERO

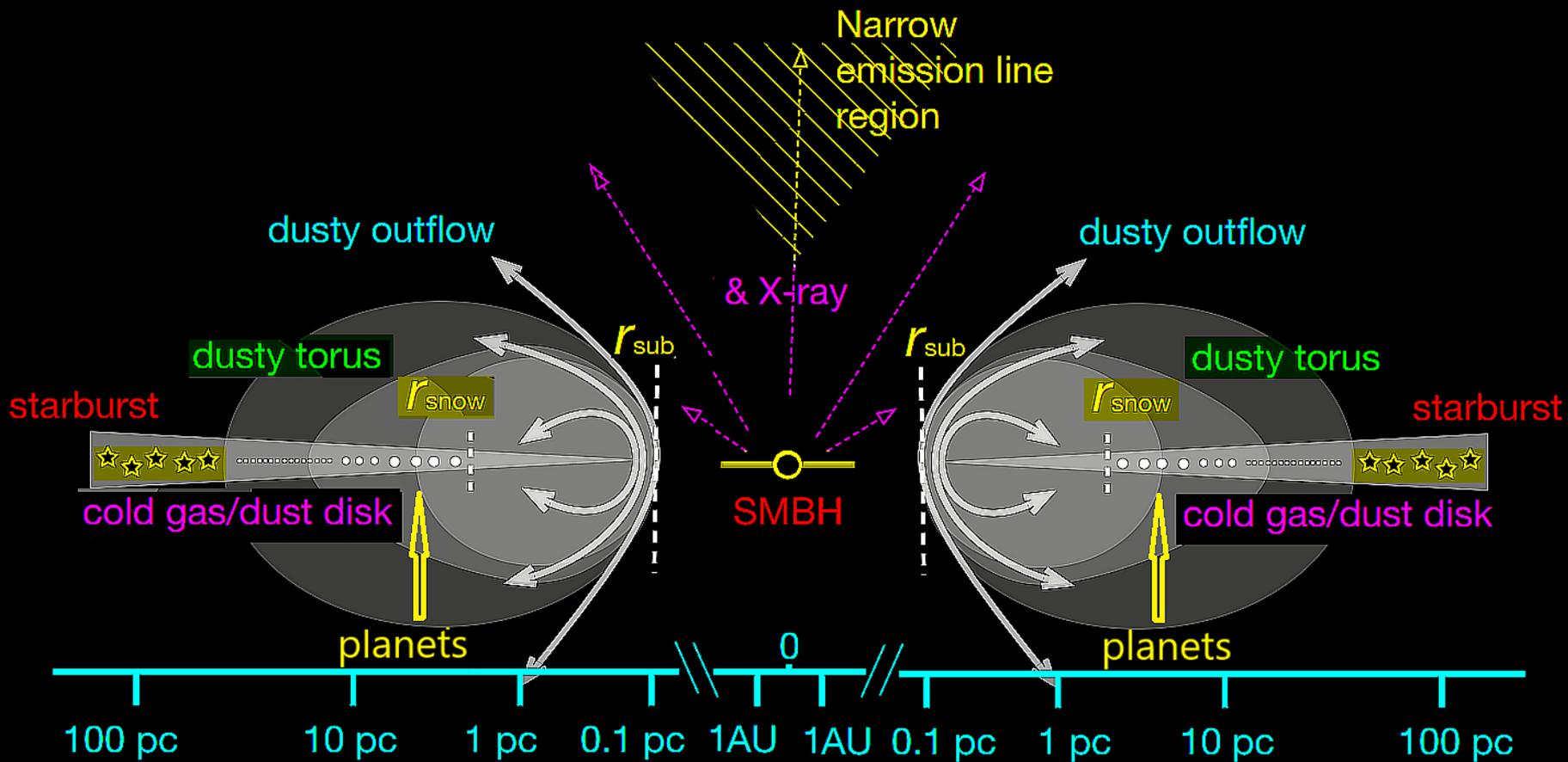
JET

AGN - Active Galactic Nuclei

# Planets

## Black Hole Planets

### AGN - Active Galactic Nuclei



# Planets

## Black Hole Planets

### PLANETS AROUND SMBH

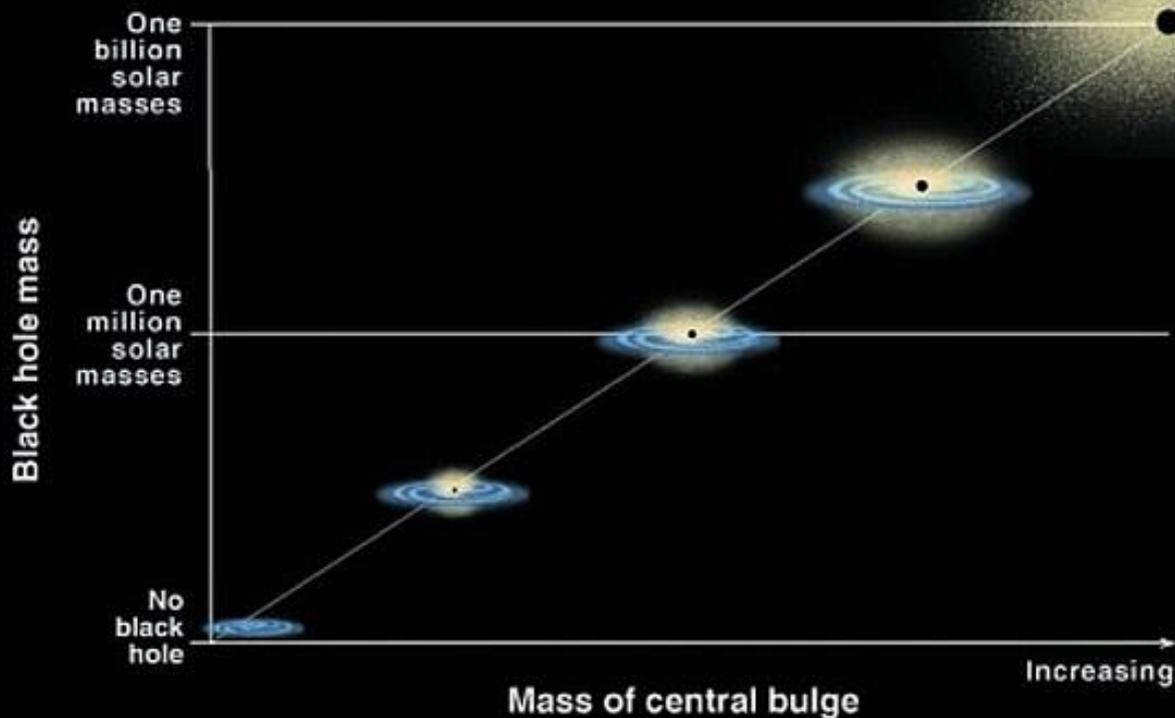
Differences between the proto-planetary disk and AGN.

	proto-planetary disk	circumnuclear disk
mass of the central object	$M_{\star} \sim M_{\odot}$	$M_{BH} \sim 10^{6-9} M_{\odot}$
luminosity of the central source	$\sim L_{\odot}$	$10^{10-12} L_{\odot}$
spectrum of the central source	black body	power law
size of the dusty disk	10-100 AU	0.1 pc - 100 pc
inner edge of the dusty disk	$\sim 0.1 \text{ pc}^a$	dust sublimation radius (sub pc $\sim$ pc)
gas mass	$\sim 0.01 M_{\star}$	$\sim 0.1 M_{BH}$
dust mass	$\sim 10^{-4} M_{\odot}$	$\sim 10^3 - 10^6 M_{\odot}$
rotational period	$\sim 100 \text{ yr}$	$\sim 10^6 - 10^8 \text{ yr}$
life time	$\sim 10^6 \text{ yr}$	$10^7 - 10^8 \text{ yr}$
drag law	Epstein/Stokes	Epstein
mean free path of gas	$\sim 1-100 \text{ cm}$	$\sim 10^{12} \left( \frac{n}{10^3 \text{ cm}^{-3}} \right)^{-1} \text{ cm}$

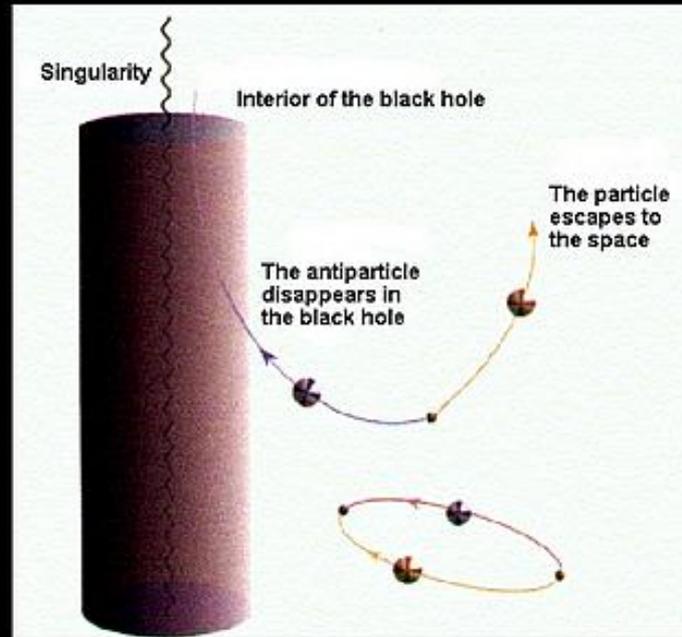
<sup>a</sup> Eisner et al. (2007); Suzuki et al. (2010)

# Buchi neri e formazione delle galassie

Correlation Between Black Hole Mass and Bulge Mass



# I buchi neri evaporano (Hawking 1975)



Rimangono freddi finché sono grandi.  
Potrebbero evaporare oggi mini-buchi neri primordiali,  
ma questi non sono mai stati rivelati.

**TEMPO CARATTERISTICO:**

$10^{64}$  ANNI PER UN BUCO NERO CON LA MASSA DEL SOLE.

$10^{98}$  ANNI PER UN BUCO NERO GALATTICO.

# Come essere uccisi da un buco nero

## Viaggio in un buco nero

- radiazione
- spaghetizzazione
- caduta nella singolarità



## Arrivo di un buco nero nel sistema solare

## Colpiti da un buco nero primordiale

## Creazione di buchi neri in laboratorio che non evaporano

*sicuramente il cielo ci cadrà sulla testa...  
ma se cadrà, cadrà domani; per oggi non cadrà...*

*(Asterix)*



**Grazie  
per  
l'attenzione**